Lista 10. Cadeias de Markov com tempo contínuo II.

Uma das principais habilidades para essa lista é escrever as equações de Kolmogorov e achar a medida invariante.

$$\text{equações forward } P'_{i,j}(t) = \sum_{k\neq j} P_{i,k}(t)q_{k,j} - v_j P_{i,j}(t)$$
$$\text{equações backward } P'_{i,j}(t) = \sum_{k\neq j} q_{i,k}P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t)$$

1. Tempo de vida está modelado como cadeia de Markov com tempo contínuo como transição em dois estados fisiológicos A e B junto com estado T, terminal. As taxas de transição são $\lambda_{AB}, \lambda_{AT}, \lambda_{BT}$.

   (a) (1 ponto) escrever sistema das equações de Kolmogorov *backward, forward*;

   (b) (1 ponto) indique se há existência de estado absorvente, escreva medida invariante;

   (c) (3 pontos)* consegue achar de forma explicita as probabilidades $p_{AB}(t), p_{AT}(t), p_{BT}(t)$? ($*$ significa que esse ponto adicional e não é obrigatório).

   (d) (1 ponto) construir a matriz de transição para cadeia embutida;

   (e) (1 ponto) o que pode falar sobre a medida invariante para cadeia embutida, pode achar a medida invariante?

Solução.

(1 ponto) escrever sistema das equações de Kolmogorov *backward, forward*

Escrevemos as equações somente para transições de estado A:

Descrevemos forward:

$$\begin{aligned}
P'_{A,A}(t) &= -(\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})P_{A,A}(t)\\
P'_{A,B}(t) &= P_{A,A}(t)\lambda_{A,B} - \lambda_{B,T}P_{A,B}(t)\\
P'_{A,T}(t) &= P_{A,A}(t)\lambda_{A,T} + P_{A,B}(t)\lambda_{B,T}
\end{aligned}$$

Descrevemos backward:

$$\begin{aligned}
P'_{A,A}(t) &= -(\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})P_{A,A}(t)\\
P'_{A,B}(t) &= \lambda_{A,B}P_{B,B}(t) - (\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})P_{A,B}(t)\\
P'_{A,T}(t) &= \lambda_{A,B}P_{B,T}(t) + \lambda_{A,T}P_{T,T}(t) - (\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})P_{A,T}(t)\\
&= \lambda_{A,B}P_{B,T}(t) + \lambda_{A,T} - (\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})P_{A,T}(t)
\end{aligned}$$

(1 ponto) indique se há existência de estado absorvente, escreva medida invariante;

Definitivamente o estado T é o estado absorvente. Isso significa que a medida de probabilidade concentrada em estado absorvente, $(\pi(A), \pi(B), \pi(T)) = (0, 0, 1)$, é invariante. Realmente, descrevendo sistema das equações de Kolmogorov forward para medida invariante $(\pi(A), \pi(B), \pi(T))$ obtemos seguinte sistema das equações

$$\begin{cases}
0 = -(\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T})\pi(A)\\
0 = \pi(A)\lambda_{A,B} - \lambda_{B,T}\pi(B)\\
0 = \pi(A)\lambda_{A,T} + \pi(B)\lambda_{B,T}\\
1 = \pi(A) + \pi(B) + \pi(T) \text{ adicionamos essa}
\end{cases}$$

Facilmente percebemos que vetor $(\pi(A), \pi(B), \pi(T)) = (0, 0, 1)$ é a única solução dessa sistema das equações.

(1 ponto) construir a matriz de transição para cadeia embutida;

Dado matriz de taxas de transições $Q = (q_{i,j})$, a relação com as probabilidade de transição para a cadeia embutida é $p_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{v_i}$,

$$\begin{pmatrix} p_{A,A} & p_{A,B} & p_{A,T}\\ p_{B,A} & p_{B,B} & p_{B,T}\\ p_{T,A} & p_{T,B} & p_{T,T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_{A,A}}{v_A} & \frac{q_{A,B}}{v_A} & \frac{q_{A,T}}{v_A}\\ \frac{q_{B,A}}{v_B} & \frac{q_{B,B}}{v_B} & \frac{q_{B,T}}{v_B}\\ \frac{q_{T,A}}{v_T} & \frac{q_{T,B}}{v_T} & \frac{q_{T,T}}{v_T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_{A,B}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}} & \frac{\lambda_{A,T}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}}\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{q_{T,A}}{v_T} & \frac{q_{T,B}}{v_T} & \frac{q_{T,T}}{v_T}\end{pmatrix}$$

o que fazer com a última linha? todas as taxas $q_{T,A}, q_{T,B}, q_{T,T}$ são zeros, e temos uma incerteza do tipo $\frac{0}{0}$. Um dos jeitos para estados absorventes (e só para eles) podemos definir a taxa $q_{T,T}$ de "pular"no mesmo estado como um número qualquer positivo. Assim $v_T = q_{T,T}$, pois outras taxas são zeros para estado absorvente. Finalmente a matriz vai ser

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_{A,B}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}} & \frac{\lambda_{A,T}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que não perturbe a nossa intuição.

(1 ponto) o que pode falar sobre a medida invariante para cadeia embutida, pode achar a medida invariante?

Bom, consideremos para matriz de transição a equação para medida invariante

$$(\pi(A), \pi(B), \pi(T)) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_{A,B}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}} & \frac{\lambda_{A,T}}{\lambda_{A,B}+\lambda_{A,T}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi(A), \pi(B), \pi(T)), \quad \pi(A) + \pi(B) + \pi(T) = 1.$$

Solucionando e escrevendo sistema das equações, obtemos

$$\begin{cases} \pi(A) = 0 \\ \pi(B) = \pi(A) \dfrac{\lambda_{A,B}}{\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T}} \\ \pi(T) = \pi(A) \dfrac{\lambda_{A,T}}{\lambda_{A,B} + \lambda_{A,T}} + \pi(B) + \pi(T) \\ \quad 1 = \pi(A) + \pi(B) + \pi(T) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi(A) = 0 \\ \pi(B) = 0 \\ \pi(T) = 1 \end{cases}$$

A medida invariante é totalmente concentrada em estado T.

2. Considere cadeia de Markov com três estados A, B e C com seguintes taxas de transição:

$$\lambda_{AB} = \lambda_{AC} = 2, \lambda_{BA} = \lambda_{CA} = 1.$$

(a) (1 ponto) escrever sistema das equações de Kolmogorov *backward, forward*;

(b) (2 pontos) achar medida invariante π dessa cadeia usando equações de balanço detalhado;

(c) (1 ponto) construir a matriz de transição para cadeia embutida;

(d) (1 ponto) a cadeia embutida é periódica? caso positivo, achar o período da periodicidade;

(e) (1 ponto) o que pode falar sobre a medida invariante, pode achar a medida invariante? a medida invariante π do item (b) pode ser considerada como medida invariante para cadeia embutida?

Solução.

(1 ponto) escrever sistema das equações de Kolmogorov *backward, forward*;

Escrevemos as equações para todas probabilidades:

Descrevemos forward:

$$\begin{cases} P'_{A,A}(t) = P_{A,B}(t)\lambda_{BA} + P_{A,C}(t)\lambda_{CA} - (\lambda_{AB} + \lambda_{AC})P_{A,A}(t) \\ P'_{A,B}(t) = P_{A,A}(t)\lambda_{AB} - \lambda_{BA}P_{A,B}(t) \\ P'_{A,C}(t) = P_{A,A}(t)\lambda_{AC} - \lambda_{CA}P_{A,C}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'_{B,A}(t) = P_{B,B}(t)\lambda_{BA} + P_{B,C}(t)\lambda_{CA} - (\lambda_{AB} + \lambda_{AC})P_{A,A}(t) \\ P'_{B,B}(t) = P_{B,A}(t)\lambda_{AB} - \lambda_{BA}P_{B,B}(t) \\ P'_{B,C}(t) = P_{B,A}(t)\lambda_{AC} - \lambda_{CA}P_{B,C}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'_{C,A}(t) = P_{C,B}(t)\lambda_{BA} + P_{C,C}(t)\lambda_{CA} - (\lambda_{AB}+\lambda_{AC})P_{C,A}(t) \\ P'_{C,B}(t) = P_{C,A}(t)\lambda_{AB} - \lambda_{BA}P_{C,B}(t) \\ P'_{C,C}(t) = P_{C,A}(t)\lambda_{AC} - \lambda_{CA}P_{C,C}(t) \end{cases}$$

Descrevemos backward:

$$\begin{cases} P'_{A,A}(t) = \lambda_{AB}P_{B,A}(t) + \lambda_{AC}P_{C,A}(t) - (\lambda_{AB}+\lambda_{AC})P_{A,A}(t) \\ P'_{A,B}(t) = \lambda_{AB}P_{B,B}(t) + \lambda_{AC}P_{C,B}(t) - (\lambda_{AB}+\lambda_{AC})P_{A,B}(t) \\ P'_{A,C}(t) = \lambda_{AB}P_{B,C}(t) + \lambda_{AC}P_{C,C}(t) - (\lambda_{AB}+\lambda_{AC})P_{A,C}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'_{B,A}(t) = \lambda_{BA}P_{A,A}(t) - \lambda_{BA}P_{B,A}(t) \\ P'_{B,B}(t) = \lambda_{BA}P_{A,B}(t) - \lambda_{BA}P_{B,B}(t) \\ P'_{B,C}(t) = \lambda_{BA}P_{A,C}(t) - \lambda_{BA}P_{B,C}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} P'_{C,A}(t) = \lambda_{CA}P_{A,A}(t) - \lambda_{CA}P_{C,A}(t) \\ P'_{C,B}(t) = \lambda_{CA}P_{A,B}(t) - \lambda_{CA}P_{C,B}(t) \\ P'_{C,C}(t) = \lambda_{CA}P_{A,C}(t) - \lambda_{CA}P_{C,C}(t) \end{cases}$$

(2 pontos) achar medida invariante π dessa cadeia usando equações de balanço detalhado;

Pela apostila, as equações de balanço detalhado para distribuição $(\pi(A), \pi(B), \pi(C))$ são

$$\pi(i)q_{i,j} = \pi(j)q_{j,i}, \quad i \neq j.$$

Então

$$\begin{cases} \pi(A)\lambda_{AB} = \pi(B)\lambda_{BA} \\ \pi(A)\lambda_{AC} = \pi(C)\lambda_{CA} \\ \pi(A)+\pi(B)+\pi(C) = 1 \text{ adicionamos} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi(A) = \pi(B) \\ 2\pi(A) = \pi(C) \\ \pi(A)+\pi(B)+\pi(C) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi(A) = \frac{1}{5} \\ \pi(B) = \frac{2}{5} \\ \pi(C) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(1 ponto) construir a matriz de transição para cadeia embutida;

Dado matriz de taxas de transições $Q = (q_{i,j})$, a relação com as probabilidade de transição para a cadeia embutida é $p_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{v_i}$, em que $v_i = \sum_{j\neq i} q_{i,j}$. Assim, temos

$$\begin{pmatrix} p_{A,A} & p_{A,B} & p_{A,C} \\ p_{B,A} & p_{B,B} & p_{B,C} \\ p_{C,A} & p_{C,B} & p_{C,C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 ponto) a cadeia embutida é periódica? caso positivo, achar o período da periodicidade;

Por exemplo, a definição da wikipedia (`https://pt.wikipedia.org/wiki/Cadeias_de_Markov#Periodicidade`): Um estado i tem período k se houver retorno ao estado i deve ocorrer em múltiplos de passos de tempo k. Formalmente, o período de um estado é definido como

$$k = \text{mdc}\{n > 0 : \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\}$$

(Onde "mdc"é o maior divisor comum), desde que este conjunto não é vazio. Caso contrário, o período não está definido. Note-se que mesmo que um estado tem período k, pode não ser possível atingir o estado em k passos. Por exemplo, suponha que é possível voltar ao estado em $\{6, 8, 10, 12, \dots\}$ intervalos de tempo; k seria 2, embora 2 não aparece nesta lista.

Se $k = 1$, então o estado é dito ser aperiódico: retorno ao estado i pode ocorrer em períodos irregulares. Pode ser demonstrado que um estado i é aperiódico se e somente se existe n tal que para todo $n' \geq n$,

$$\mathbb{P}(X_{n'} = i \mid X_0 = i) > 0.$$

Caso contrário ($k > 1$), o estado é dito ser periódico com período k. A cadeia de Markov é aperiódica se cada estado é aperiódico. Uma cadeia de Markov irredutível só precisa de um estado aperiódico para implicar que todos os estados são aperiódicos. Seja X_n cadeia embutida com matriz de transição definido em item anterior. Observe, que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 = A \mid X_0 = A) = 0, \quad \mathbb{P}(X_1 = B \mid X_0 = B) = 0, \quad \mathbb{P}(X_1 = C \mid X_0 = C) = 0, \\ &\mathbb{P}(X_2 = A \mid X_0 = A) > 0, \quad \mathbb{P}(X_2 = B \mid X_0 = B) > 0, \quad \mathbb{P}(X_2 = C \mid X_0 = C) > 0, \\ &\mathbb{P}(X_3 = A \mid X_0 = A) = 0, \quad \mathbb{P}(X_3 = B \mid X_0 = B) = 0, \quad \mathbb{P}(X_3 = C \mid X_0 = C) = 0, \\ &\mathbb{P}(X_4 = A \mid X_0 = A) > 0, \quad \mathbb{P}(X_4 = B \mid X_0 = B) > 0, \quad \mathbb{P}(X_4 = C \mid X_0 = C) > 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

o que mostra que a cadeia é aperiódica com período 2.

(1 ponto) o que pode falar sobre a medida invariante, pode achar a medida invariante? a medida invariante π do item (b) pode ser considerada como medida invariante para cadeia embutida?

Tentaremos resolver a equação para medida invariante

$$(\pi(A), \pi(B), \pi(C)) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi(A), \pi(B), \pi(C)), \quad \pi(A) + \pi(B) + \pi(C) = 1.$$

Solucionando e escrevendo sistema das equações, obtemos

$$\begin{cases} \pi(A) = \pi(B) + \pi(C) \\ \pi(B) = \pi(A)/2 \\ \pi(C) = \pi(A)/2 \\ \qquad 1 = \pi(A) + \pi(B) + \pi(T) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi(A) = 1/2 \\ \pi(B) = 1/4 \\ \pi(T) = 1/4 \end{cases}$$

A medida invariante é diferente da medida invariante do item (b). Observe, que, embora a medida invariante existe, mas ela não é limite de potência de matriz de transição: para qualquer $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$