Lista 9. Cadeias de Markov com tempo contínuo I.

1. (2 pontos) Uma população de alguns organismos consiste em dois sexos - fêmeas e machos. Em uma colónia cada macho e fêmea formam um casal em intervalo h de tempo com probabilidade $\lambda h + o(h)$ e no mesmo instante eles produzem um organismo com a mesma probabilidade de ser macho ou fêmea. Cada organismo deixa a colônia durante tempo h com a probabilidade $\mu h + o(h)$. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ número de machos e fêmeas respectivamente dentro da colônia. Descrever a cadeia de Markov com tempo contínuo que descreve a evolução dessa colônia: descrever o conjunto de estados S da cadeia

   (a) em temos de taxas de transição $q_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$;

   (b) em temos de taxas de permanência $v_i, i \in S$ e as probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$.

Solução. Conjunto de estados está já indicada em anunciado: número de machos e fêmeas em colônia, $S = \{(k, m),\ k, m \in \mathbb{Z}_+\}$, em que $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Descrevemos as transições e respectivas taxas de transição. Para isso, primeiramente, consideramos um exemplo particular.

Imagina que existe n indivíduos em um conjunto (colônia), e cada um pode sair da colônia com a taxa λ. Seja o estado da cadeia que descreve a colônia é número de indivíduos em colônia. Qual é a taxa da transição $n \to n-1$? De acordo com a interpretação da taxa de transição como o tempo de permanência, cada indivíduo, i "solta" o seu tempo T_i quando ele vai sair da colônia, e a transição $n \to n-1$ ocorre quando um indivíduo, cujo tempo de sair, T, é menor de todos, $T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Lembrando que todos $T_i \sim \exp(\lambda)$ e lembrando as propriedades de distribuição exponencial, temos $T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \exp(n\lambda)$. O que significa, que a taxa de transição $n \to n-1$ é $n\lambda$.

Voltando para o nosso exemplo. Calcularemos a taxa de transição, quando aparece um macho na população, $(m, f) \to (m+1, f)$. Cada possível casal quer se-reproduzir com a taxa λ e vai produzir um macho (fêmea) com taxa $\lambda/2$. Então, cada possível par "solta" o seu tempo de formação e reprodução simultânea exponencial, T_{casal}. Qual casal vai se-reproduzir? Aquele, cuja tempo de reprodução é menor. Se temos m machos e f fêmeas, o número de casais possíveis é mf, então a taxa

$$(m, f) \to (m+1, f)$$

ocorre com a taxa $m \cdot f \cdot \lambda/2$, e a transição

$$(m, f) \to (m, f+1)$$

com a mesma taxa $m \cdot f \cdot \lambda/2$. Cada indivíduo "chamado" da colônia com a mesma taxa, que não depende se sexo do organismo. Um macho vai deixar a colônia com a taxa proporcional a número de machos na colônia, então a transição

$$(m, f) \to (m-1, f)$$

ocorre com a taxa $m \cdot \mu$, e a transição

$$(m, f) \to (m, f-1)$$

com taxa $f \cdot \mu$. Observe, que quando a quantidade de um dos sexos fica zero, logo o processo para (vai parar) em estado $(0, 0)$, de onde processo nunca vai sair, pois estado $(0, 0)$ é absorvente: a transição

$$(m, 0) \to (m-1, 0)$$

ocorre com a taxa $m \cdot \mu$, e a transição

$$(0, f) \to (0, f-1)$$

com taxa $f \cdot \mu$.

(b) em temos de taxas de permanência $v_i, i \in S$ e as probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$.

Lembrando que $p_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{v_i}$, em que $v_i = \sum_j q_{i,j}$, obtemos seguinte: seja estado corrente é (m, f), então

$$p_{(m,f),(m+1,f)} = \mathbb{P}((m, f) \to (m+1, f)) = \frac{m \cdot f \cdot \lambda/2}{m \cdot f \cdot \lambda + (m+f) \cdot \mu}$$

$$p_{(m,f),(m,f+1)} = \mathbb{P}((m, f) \to (m, f+1)) = \frac{m \cdot f \cdot \lambda/2}{m \cdot f \cdot \lambda + (m+f) \cdot \mu}$$

$$p_{(m,f),(m-1,f)} = \mathbb{P}((m, f) \to (m-1, f)) = \frac{m \cdot \mu}{m \cdot f \cdot \lambda + (m+f) \cdot \mu}$$

$$p_{(m,f),(m,f-1)} = \mathbb{P}((m, f) \to (m, f-1)) = \frac{f \cdot \mu}{m \cdot f \cdot \lambda + (m+f) \cdot \mu}$$

Observe, que a soma das probabilidade igual 1.

2. (2 pontos) Consideramos simples modelo estocástico de propagação de infecção conhecida em sua versão determinista como modelo SIR (**S**usceptible, **I**nfectious, **R**ecovered):

   - consideramos N indivíduos de uma pequena colônia;
   - inicialmente temos $k, 0 < k < N$ infectados e $N - k$ suscetíveis;
   - cada infectado contamina um indivíduo suscetível com a taxa λ;
   - cada infectado vai ser curado (recuperado) e consequentemente imunizado (não pode mais ser contaminado) com a taxa μ.

   Descrever o modelo como cadeia de Markov com tempo contínuo, considerando que cada indivíduo pode estar em um dos três estados: infectado, suscetível e imunizado (recuperado)

   (a) em temos de taxas de transição $q_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$;

   (b) em temos de taxas de permanência $v_i, i \in S$ e as probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$.

Solução. O estado da cadeia pode ser definido como um vetor com três componentes (n_S, n_I, n_R), em que $n_S, n_I, n_R \in \{0, 1, \ldots, N\}$ e, simultaneamente, $n_S + n_I + n_R = N$. As transições possíveis são: (i) um suscetível virou infectado, (ii) um infectado vira recuperado, com respectivas taxas de transição. Seja (x, y, z) um estado de modelo, então

(i) um suscetível virou infectado:

$$(x, y, z) \to (x - 1, y + 1, z) \text{ com taxa } q_{(x,y,z),(x-1,y+1,z)} = x \cdot y \cdot \lambda;$$

(ii) um infectado vira recuperado:

$$(x, y, z) \to (x, y - 1, z + 1) \text{ com taxa } q_{(x,y,z),(x,y-1,z+1)} = y \cdot \mu;$$

O mesmo em termos de probabilidade (i) um suscetível virou infectado:

$$(x, y, z) \to (x - 1, y + 1, z) \text{ com taxa } p_{(x,y,z),(x-1,y+1,z)} = \frac{x \cdot y \cdot \lambda}{y \cdot \mu + x \cdot y \cdot \lambda} = \frac{x \cdot \lambda}{\mu + x \cdot \lambda};$$

(ii) um infectado vira recuperado:

$$(x, y, z) \to (x, y - 1, z + 1) \text{ com taxa } q_{(x,y,z),(x,y-1,z+1)} = \frac{\mu}{\mu + x \cdot \lambda}.$$

Observe, que as probabilidade de transição da cadeia embutida, não depende do componente y.

3. (2 pontos) Uma seguradora modela o tempo de vida de um indivíduo, como uma sequência de quatro estágios sequenciais de envelhecimento, A, B, C e D. Todas as taxas de transições A → B → C → D → "Morte"ocorrem com a mesma taxa λ. Segundo essa visão, qual é a distribuição (densidade) de tempo de vida de um indivíduo? Achar a média e a variância de tempo de vida. (Dica: lembrar a distribuição de soma dos exponenciais, que estudamos nas aulas de Poisson)

Solução. Segundo esse modelo o tempo de vida de um indivíduo T é composta pela tempo de permanência em cada estado de envelhecimento T_A, T_B, T_C, T_D independentes identicamente distribuídas com a distribuição exponencial com taxa λ

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D.$$

Então, a distribuição de tempo de vida T é a distribuição da soma de quatro independentes exponenciais, cuja densidade de distribuição é dada em livro e apostila de aula 3:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!}, \quad t > 0.$$

4. (4 pontos) Um carro pode estar em três estados: F (funcional), R (em reparação) e P (perda total), em que o estado P é estado absorvente. As transições entre os estados são descritos de seguinte forma: todas as taxas de transições F $\to$ R, R $\to$ F, e R $\to$ P, são iguais e igual à λ. Achar a densidade de vida útil (em estado F) de um carro. (Dica: lembrar a distribuição de soma dos exponenciais independentes com a mesma taxa, que estudamos nas aulas de Poisson, e represente a densidade da vida útil nada mais como a mistura das densidades)

Solução. O tempo de vida útil T é composta de somas de tempo de permanência em estado F antes de "cair" em estado P. Observe também que se o carro está em reparação, então com probabilidade 50% o carro volta para estado funcional, e com a probabilidade 50% o carro vai para estado absorvente P e nunca mais volta de lá. Seja $T_i \sim \exp(\lambda)$, consideramos vários casos:

$$\begin{array}{rll}
\mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{P} & T = T_1 & \text{com probabilidade } 1/2 \\
\mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{P} & T = T_1 + T_2 & \text{com probabilidade } 1/2^2 \\
\mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{P} & T = T_1 + T_2 + T_3 & \text{com probabilidade } 1/2^3 \\
\mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{R} \to \mathrm{P} & T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 & \text{com probabilidade } 1/2^4 \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Essa simples visão indica que o tempo de vida pode ser representados como mistura

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{2} + \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)\frac{1}{2^2} + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}\frac{1}{2^3} + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{3!}\frac{1}{2^4} + \dots \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(1 + (\lambda t)\frac{1}{2} + \frac{(\lambda t)^2}{2!}\frac{1}{2^2} + \frac{(\lambda t)^3}{3!}\frac{1}{2^3} + \dots\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(1 + (\lambda t/2) + \frac{(\lambda t/2)^2}{2!} + \frac{(\lambda t/2)^3}{3!} + \dots\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{2} \cdot e^{\lambda t/2} = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} t} \\
T &\sim \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right).
\end{aligned}$$