Lista 8. Cadeias de Markov com tempo discreto II.

Para resolver alguns exercícios vamos precisar de conceito de cadeia de Markov *reversível*. Uma cadeia de Markov ergódica chama-se cadeia *reversível*, se existe a distribuição $\pi = (\pi_i)$ que satisfaz seguinte equação de *balanço detalhado*: para cada dois estados i, j

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \text{para todo } i \neq j. \tag{1}$$

Esse conceito é muito útil por seguintes simples motivos: primeiro, se a sua cadeia é reversível, então a medida $\pi = (\pi_i)$ é medida invariante, segundo, observe que a sistema das equações (1) é muito mais simples para achar a medida invariante de que o sistema (2), o que define a medida invariante. Isso significa, que se a medida $\pi = (\pi_i)$ satisfaz equação (1), então ela satisfaz a equação para medida invariante $\pi^T P = \pi^T$:

$$\pi_i = \sum_j \pi_j p_{j,i} \quad \text{para todo } i. \tag{2}$$

Sistema das equações (1) é conhecido também como sistema das equações de *balanço global*. Outra observação: se uma cadeia de Markov tem uma medida invariante, isso não significa que a cadeia é reversível, mas sempre verdade a proposição em outra direção.

1. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição a um passo P:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{vmatrix}.$$

A cadeia é irredutível, por isso, ergódica, por isso tem distribuição invariante.

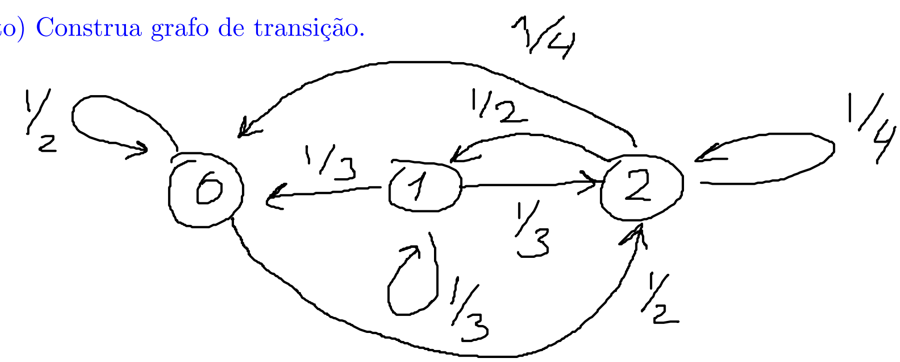
(a) (1 ponto) Construa grafo de transição.

(b) (1 ponto) Achar a distribuição invariante, usando o sistema de equações de *balanço global*, (2).

(c) (1 ponto) Verifique se a cadeia é reversível, tentando solucionar equações (1).

Solução:

(1 ponto) Construa grafo de transição.



(1 ponto) Achar a distribuição invariante, usando o sistema de equações de *balanço global*, (2).

Para achar a medida invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ satisfaz equação

$$\pi^T P = \pi^T \Leftrightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3), \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

o que em forma de sistema das equações (balanço global)

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 \dfrac{1}{2} + \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 \dfrac{1}{4} \\ \pi_2 = \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 \dfrac{1}{2} \\ \pi_3 = \pi_1 \dfrac{1}{2} + \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 \dfrac{1}{4} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_3 \\ \dfrac{\pi_2}{3} = \dfrac{\pi_3}{2} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{4}{11} \\ \pi_2 = \dfrac{3}{11} \\ \pi_3 = \dfrac{4}{11} \end{cases}$$

(1 ponto) Verifique se a cadeia é reversível, tentando solucionar equações (1).

Dentro de sistema das equações (1) temos seguinte equação

$$\pi_1 p_{1,2} = \pi_2 p_{2,1} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1 \cdot 0 = \pi_2 \cdot \frac{1}{3}$$

o que leva que todos π_i são zeros, e leva em contradição com a equação $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Então a cadeia não é reversível.

2. (2 ponto) Maria e João jogam cartas. Maria joga melhor de que João: as chances ela ganhar são 4 versus 1. Ambos em total têm 5 reais. Cada jogada aposta um real: se Maria ganha um jogo, João paga ela um real, e caso João ganha, a Maria paga para João um real. Ganhador é aquele que fica com todos os 5 reais. Para equilibrar o jogo, eles decidiram que a Maria vai começar com um real e João com 4 reais. Essa distribuição inicial da banca realmente equilibra as chances de ganhar o jogo?

Solução: A cadeia de Markov X_n que corresponde a quantidade de reais com a Maria, tem seguintes transições $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p = q$ e estamos prontos para aplicar a fórmula para a probabilidade de ganhar o jogo começando de i reais:

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{se } p \neq q; \\ \dfrac{i}{N}, & \text{se } p = q. \end{cases}$$

p é a probabilidade de que a Maria ganha. Ela tem chances "4 versus 1", o que significa que $p = 4/5$, assim, $q = 1/5$, e pelo anunciado $N = 5$ e ela começa com $i = 1$. Pela fórmula a probabilidade dela ganhar o jogo: $q/p = 1/4 = 0.25$ e

$$P_1 = \frac{1 - 0.25^1}{1 - 0.25^5} \cong 0.75 = 75\%.$$

assim, as chances dela ganhar são muito diferente de 50%. Então a divisão inicial não igualizou as chances.

3. Um aparelho pode estar em dois estados: "Q"quebrado e "F"estado funcional. As probabilidades de transição de um dia para o outro são resumidas em uma matriz:

	F	Q
F	0.99	0.01
Q	0.85	0.15

(a) (1 ponto) Achar distribuição invariante para essa matriz de transição.

(b) (1 ponto) Supomos que o estado inicial é F. Seja T é dia da primeira falha. Qual é a distribuição de T e achar a média desse tempo.

(c) (1 ponto) A transição $F \to F$ interpreta-se que a máquina está sendo reparada. Seja tempo T_R é dias de reparo da máquina. Achar a distribuição desse tempo de reparo e a média de tempo de reparo.

Solução:

(1 ponto) Achar distribuição invariante para essa matriz de transição.

Seja $\pi = (\pi_F, \pi_Q)$ medida invariante

$$(\pi_F, \pi_Q) \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.85 & 0.15 \end{pmatrix} = (\pi_F, \pi_Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_F = 0.99\pi_F + 0.85\pi_Q \\ \pi_Q = 0.01\pi_F + 0.15\pi_Q \\ 1 = \pi_F + \pi_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.01\pi_F = 0.85\pi_Q \\ 1 = \pi_F + \pi_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_F = \dfrac{85}{86} \\ \pi_Q = \dfrac{1}{86} \end{cases}$$

(1 ponto) Supomos que o estado inicial é F. Seja T é dia da primeira falha. Qual é a distribuição de T e achar a média desse tempo.

Considere o evento $\{T = n\}$. A única trajetória que corresponde esse evento é $n-1$ transições $F \to F$ consecutivas com uma transição $F \to Q$ no final. Então

$$\mathbb{P}(T = n) = 0.99^{n-1} 0.01, \quad n = 1, 2, \dots$$

o que significa que T tem a distribuição geométrica com $p = 0.01$, e a média dessa variável

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.01} = 100.$$

(1 ponto) A transição $F \to F$ interpreta-se que a máquina está sendo reparada. Seja tempo T_R é dias de reparo da máquina. Achar a distribuição desse tempo de reparo e a média de tempo de reparo.

Aqui é um erro de grafia. Claro que somente a transição $Q \to Q$ pode ser interpretada como a máquina está sendo reparada. Considere evento $\{T_R = n\}$. A única trajetória que corresponde esse evento é $n-1$ transições $Q \to Q$ consecutivas com uma transição $Q \to F$ no final. Então

$$\mathbb{P}(T_R = n) = 0.15^{n-1} 0.85, \quad n = 1, 2, \dots$$

o que significa que T_R tem a distribuição geométrica com $p = 0.85$, e a média dessa variável

$$\mathbb{E}(T_R) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.85} = \frac{20}{17}.$$

4. Seja uma cadeia de Markov tendo como espaço de estados o conjunto $\{0, 1, 2\}$, e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

(a) (1 ponto) Para quais valores de p essa cadeia é reversível?

(b) (1 ponto) Achar medida invariante para valor qualquer $p \in (0, 1)$.

Solução:

(1 ponto) Para quais valores de p essa cadeia é reversível?

Bom, aqui também não é matriz que eu queria colocar. Mas pelo menos essa matriz forma uma cadeia de Markov não irredutível, pois o estado 2 não é comunicado com nenhum outro estado.

$$\pi(1)p_{1,2} = \pi(2)p_{2,1} \quad \Leftrightarrow \quad \pi(1) \cdot \frac{1}{2} = \pi(2) \cdot 0$$

o que logo mostra que a única solução de (1) é zeros, o que significa que a cadeia não é reversível.

(1 ponto) Achar medida invariante para valor qualquer $p \in (0, 1)$.

Vamos tentar achar $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_1 p + \pi_2/2 + (1-p)\pi_3 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = \pi_1(1-p) + \pi_2/2 + p\pi_3 \\ \ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_1 p + (1-p)\pi_3 \\ \pi_3 = \pi_1(1-p) + p\pi_3 \\ \ 1 = \pi_1 + \pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{2} \\ \pi_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

para p qualquer.

Na realidade, eu queria escrever outra matriz:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

Escrevemos equações (1):

$$\begin{cases} \pi_1(1-p) = \pi_2 \cdot \dfrac{1}{2} \\ \pi_3(1-p) = \pi_2 \cdot \dfrac{1}{2} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{2(2-p)} \\ \pi_2 = \dfrac{1-p}{2-p} \\ \pi_3 = \dfrac{1}{2(2-p)} \end{cases}$$

Então a cadeia é reversível com medida invariante $\left(\frac{1}{2(2-p)}, \frac{1-p}{2-p}, \frac{1}{2(2-p)}\right)$.