Lista 7 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito[1]

1. Considere seguinte exemplo de exame da Sociedade de Atuarias:

A machine is in one of four states (F, G, H, I) and migrates annually among them according to a discrete-time Markov process with transition probability matrix:

	F	G	H	I
F	0.20	0.80	0.00	0.00
G	0.50	0.00	0.50	0.00
H	0.75	0.00	0.00	0.25
I	1.00	0.00	0.00	0.00

At time 0, the machine is in State F. A salvage company will pay 500 at the end of 3 years if the machine is in State F.

Assuming $v = 0.90$, calculate the actuarial present value at time 0 of this payment.

(A) 150

(B) 155

(C) 160

(D) 165

(E) 170

Para resolver essa questão você tem que

Solução:

(a) Achar a probabilidade de maquina estar em estado "F" depois de três anos.

Para obter a probabilidade da máquina estar no estado F depois de 3 anos devemos obter a matriz de transição para 3 anos.

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.468 & 0.352 & 0.08 & 0.1 \\ 0.420 & 0.380 & 0.20 & 0.0 \\ 0.380 & 0.320 & 0.30 & 0.0 \\ 0.440 & 0.160 & 0.40 & 0.0 \end{pmatrix},$$

Portanto a probabilidade de estar no estado F, dado que começou no F é **0.468**

(b) Depois disso, caso você saiba o que é *actuarial present value*, calcule-o.

Concluimos que o *actuarial present value* é $0.468 \cdot 500 \cdot (0.90)^3 = 170$

[1] Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Junho, 2020

2. As probabilidades de transição anual entre os estados de saúde de pessoas estão resumidas pela seguinte matriz:

	Healthy	Sick	Terminated
Healthy	0.7	0.1	0.2
Sick	0.3	0.6	0.1
Terminated	0.0	0.0	1.0

A cada ano o segurado paga o prêmio bruto de 800.

Solução:

(a) Achar a média de prêmio pago durante três anos pelo um segurado saudável.

Por causa de transições anuais, vamos estabelecer seguinte regra: o indivíduo para prêmio no inicio de ano. Durante três anos os valores pagos com respectivas probabilidades são:

(a) 800 – com a probabilidade p_1, em que p_1 é a probabilidade de que o indivíduo morreu durante primeiro ano; a probabilidade p_1 corresponde a probabilidade de transição p_{HT} da tabela, então $p_1 = 0.2$;

(b) 1600 – com a probabilidade p_2, em que p_2 é a probabilidade de que o indivíduo morreu durante segundo ano; a probabilidade p_2 corresponde a probabilidade de seguinte evento: individuo sobrevive durante primeiro ano e morre no segundo ano; o que pode ser representado por duas possibilidades de transição em dois anos

$$\mathrm{H} \to \mathrm{H} \to \mathrm{T} \quad \text{ou} \quad \mathrm{H} \to \mathrm{S} \to \mathrm{T}$$

com respectivas probabilidades

$$p_{H,H} \cdot p_{H,T} \quad \text{e} \quad p_{H,S} \cdot p_{S,T}$$

por isso, a probabilidade p_2 pode ser calculada pelo seguinte formula

$$p_2 = p_{H,H} \cdot p_{H,T} + p_{H,S} \cdot p_{S,T} = 0.7 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.14 + 0.01 = 0.15;$$

(c) 2400 – com a probabilidade p_3, em que p_3 é a probabilidade de que o indivíduo sobreviveu durante dois primeiros anos, o que por sua vez significa que o individuo não morreu no primeiro ano e não morreu no segundo ano; lembrando que esses dois eventos são disjuntos, por isso

$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - 0.35 = 0.75.$$

Seja X é valor pago para seguradora durante três anos. De que já vimos, a distribuição dessa variável pode ser representada como tabela

X	800	1600	2400
P	0.2	0.15	0.75

Cujo valor médio é

$$\mathbb{E}(X) = 800 \cdot 0.2 + 1600 \cdot 0.15 + 2400 \cdot 0.75 = 2200$$

(b) Supomos que cada ano o estado gasta em média para sistema de saúde para cada indivíduo 500, se ele é saudável, 3000 caso ele doente e nada caso contrário. Achar a média de gastos de estado por um indivíduo durante 3 anos.

Utilizando o mesmo raciocínio "por trajetórias", supomos que o estado paga "no final de ano" (so para diversificar os casos):

trajetória	probabilidade	gasto de estado
H → T → T → T	$p_{H,T} = 0.2$	0
H → H → T → T	$p_{H,H}p_{H,T} = 0.14$	500
H → S → T → T	$p_{H,S}p_{S,T} = 0.01$	3000
H → H → H → T	$p_{H,H}p_{H,H}p_{H,T} = 0.098$	500+500 = 1000
H → H → S → T	$p_{H,H}p_{H,S}p_{S,T} = 0.007$	500+3000 = 3500
H → S → H → T	$p_{H,S}p_{S,H}p_{H,T} = 0.006$	3000 + 500 = 3500
H → S → S → T	$p_{H,S}p_{S,S}p_{S,T} = 0.006$	3000 + 3000 = 6000
H → H → H → H	$p_{H,H}p_{H,H}p_{H,H} = 0.343$	500+500+500 = 1500
H → H → S → H	$p_{H,H}p_{H,S}p_{S,H} = 0.021$	500+ 3000 + 500 = 4000
H → S → H → H	$p_{H,S}p_{S,H}p_{H,H} = 0.021$	3000 + 500 + 500 = 4000
H → S → S → H	$p_{H,S}p_{S,S}p_{S,H} = 0.018$	3000 + 3000 + 500 = 6500
H → H → H → S	$p_{H,H}p_{H,H}p_{H,S} = 0.049$	500+500+3000 = 4000
H → H → S → S	$p_{H,H}p_{H,S}p_{S,S} = 0.042$	500+3000 + 3000 = 6500
H → S → H → S	$p_{H,S}p_{S,H}p_{H,S} = 0.003$	3000 + 500 + 3000 = 6500
H → S → S → S	$p_{H,S}p_{S,S}p_{S,S} = 0.036$	3000 + 3000 + 3000 = 9000

Resumindo, o estado gasta

0	com probabilidade	0.2
500	com probabilidade	0.14
1000	com probabilidade	0.098
1500	com probabilidade	0.343
3000	com probabilidade	0.01
3500	com probabilidade	0.013 = 0.007+0.006
4000	com probabilidade	0.091 = 0.021 + 0.021 + 0.049
6000	com probabilidade	0.006
6500	com probabilidade	0.063 = 0.018 + 0.042 + 0.003
9000	com probabilidade	0.036

Calculando a esperança:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(gasto) =& 0 \cdot 0.2 + 500 \cdot 0.14 + 1000 \cdot 0.098 + 1500 \cdot 0.343 + 3000 \cdot 0.01 + 3500 \cdot 0.013 \\ &+ 4000 \cdot 0.091 + 6000 \cdot 0.006 + 6500 \cdot 0.063 + 9000 \cdot 0.036 = 1891.5\end{aligned}$$

3. Resolve seguinte exemplo de exame da Sociedade de Atuarias:

A certain species of flower has three states: sustainable, endangered and extinct. Transitions between states are modeled as a non-homogeneous discrete-time Markov chain with transition probability matrices Q_i as follows, where Q_i denotes the matrix from time i to i+1.

$$Q_0 = \begin{array}{c} \\ \text{Sustainable} \\ \text{Endangered} \\ \text{Extinct} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sustainable} & \text{Endangered} & \text{Extinct} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 3, 4, \ldots$$

Calculate the probability that a species endangered at time 0 will ever become extinct.

(A) 0.45

(B) 0.47

(C) 0.49

(D) 0.51

(E) 0.53

Solução. Queremos calcular a probabilidade da espécie nunca entrar em extinção, note que neste modelo não-homogêneo se a espécie não entrou em extinção até o tempo i=2, então ela nunca irá entrar a partir de i=3. Portanto a probabilidade de nunca entrar em extinção pode ser obtida a partir da probabilidade de não entrar em extinção até i=2.

$$Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 = \begin{pmatrix} 0.7790 & 0.1720 & 0.049 \\ 0.1645 & 0.3465 & 0.489 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Portanto a probabilidade de um espécie nunca entrar em extinção dado que ela começa em risco é 0.1645+0.3465 = **0.51**

4. Seja ξ_n o estado de cadeia de Markov em instante n com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix},$$

com estado inicial $P(\xi_0 = 1) = 1$. Consideramos a seguinte sequência

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_n = 1 \\ 2 & \text{se } \xi_n \neq 1 \end{cases}$$

Sabe-se que a sequência $(\eta_n)_{n=0,1,\ldots}$ forma uma cadeia de Markov. Construa a matriz de transição dela.

Solução. Seja $P = (p_{i,j}, i, j \in \{1, 2, 3\})$ a matriz de transição para cadeia $\xi = (\xi_n)$. A cadeia $\eta = (\eta_n)$ em termos de cadeia $\xi = (\xi_n)$ tem dois estados:

1 – "a cadeia ξ está em estado 1",

2 – "a cadeia ξ não está em estado 1 (ela está em estado ou 2 ou 3)".

Seguintes observações vão construir a matriz de transição para η:

a probabilidade de cadeia ξ pular do estado 1 para outro estado é $p_{1,2} + p_{1,3} = \frac{4}{7}$;

independentemente, se a cadeia ξ está em estado ou 2 ou 3 a probabilidade dela pular para 1 é a mesma: $p_{2,1} = p_{3,1} = \frac{1}{11}$.

Isso forma a matriz de transição P_η para cadeia η:

$$P_\eta = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/11 & 9/11 \end{pmatrix}$$