

Lista 6 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito¹

Exercício 1

Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson não homogêneo com taxa $\lambda(t) = 1 + \cos(t)$.

Solução:

(a) (1 ponto) Qual é a distribuição de $N(5)$?

Pela propriedade dos processos de Poisson não homogêneos a média de número de ocorrência em intervalo $[a, b]$ é igual à integral da taxa desse processo neste intervalo,

$$\mathbb{E}(N(b) - N(a)) = \int_a^b \lambda(s) ds,$$

e a distribuição é de Poisson, assim

$$N(b) - N(a) \sim Poi\left(\int_a^b \lambda(s) ds\right).$$

Usando isso, a distribuição de $N(5)$ é de Poisson

$$N(5) \sim Poi\left(\int_0^5 \lambda(s) ds\right).$$

com a média $\int_0^5 \lambda(s) ds$. Calcularemos a média:

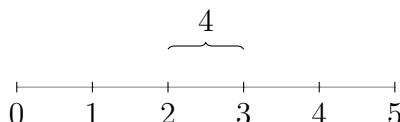
$$\begin{aligned} \int_0^5 \lambda(s) ds &= \int_0^5 (1 + \cos(s)) ds \\ &= 5 + \sin(5) \cong 4.04 \end{aligned}$$

Portanto $N(5)$ tem a distribuição de Poisson com a média 4.04, $N(5) \sim Poi(4.04)$

(b) (1 ponto) Qual é a média de número de eventos que ocorrem durante o tempo $(0, 5)$.

De acordo com item anterior, a média de uma distribuição Poisson é o próprio parâmetro, portanto a média de $N(5)$ é 4.04.

(c) (1 ponto) Qual é a média de número de eventos que ocorrem durante o tempo $(0, 5)$, sabendo, que em intervalo $(2, 3)$ ocorreram 4 eventos.



¹Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Maio, 2020

Resta saber portanto quantos eventos ocorrem em média nos intervalos $[0,2]$ U $[3,5]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N(5)|N(3) - N(2) = 4) &= \mathbb{E}(N(5) - N(3) + N(3) - N(2) + N(2) - N(0)|N(3) - N(2) = 4) \\ &= \mathbb{E}(N(5) - N(3)) + \mathbb{E}(N(3) - N(2)) + \mathbb{E}(N(2) - N(0)) \\ &= \mathbb{E}(N(5) - N(3)) + 4 + \mathbb{E}(N(2) - N(0))\end{aligned}$$

No intervalo $[0,2]$ o número de eventos tem distribuição Poisson cuja taxa é dada por

$$\int_0^2 (1 + \cos(t))dt = 2 + \sin(2) \cong 2.91.$$

No intervalo $[3,5]$ o número de eventos tem distribuição Poisson cuja taxa é dada por

$$\int_3^5 (1 + \cos(t))dt = 2 + \sin(5) - \sin(3) \cong 0.90.$$

Portanto temos que :

$$\mathbb{E}(N(5) | N(3) - N(2) = 4) = 2.91 + 4 + 0.90 = 7.81.$$

(d) (1 ponto) Achar $\mathbb{E}(N(\pi)|N(\pi/2) = 2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(N(\pi) \mid N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\right) &= \mathbb{E}\left(N(\pi) - N\left(\frac{\pi}{2}\right) + N\left(\frac{\pi}{2}\right) - N(0) \mid N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(N(\pi) - N\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \mathbb{E}\left(N\left(\frac{\pi}{2}\right) - N(0) \mid N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(N(\pi) - N\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2\end{aligned}$$

A distribuição do número de eventos no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ é Poisson cuja média é dada pela seguinte expressão $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos(t))dt$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos(t))dt &= \frac{\pi}{2} + \left[\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

Portanto temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(N(\pi) \mid N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\right) &= \frac{\pi}{2} - 1 + 2 \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(e) (1 ponto) Achar $\mathbb{E}(N(\pi) - N(\pi/2) | N(\pi/2) = 2)$

Conforme calculamos no exercício anterior temos que a distribuição do número de eventos no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ não depende de evento $N(\pi/2)$. Lembrando o calculo de item anterior temos

$$\mathbb{E}\left(N(\pi) - N\left(\frac{\pi}{2}\right) \mid N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\right) = \mathbb{E}\left(N(\pi) - N\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(f) (1 ponto) A probabilidade $p_h := \mathbb{P}(N(\pi + h) - N(\pi) = 1)$ pode ser representada como $h + o(h)$? Caso negativo, representa essa probabilidade em forma $p_h = f(h) + o(h)$ (Achar a função $f(h)$).

Sabemos, pela definição do Processo de Poisson que a probabilidade de um evento ocorrer em intervalo pequeno $(t, t + h)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$p_h(t) := \mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

Assim, escolhendo o ponto $t = \pi$:

$$\begin{aligned} p_h &= p_h(\pi) = \mathbb{P}(N(\pi + h) - N(\pi) = 1) = \lambda(\pi)h + o(h) \\ &= (1 + \cos(\pi))h + o(h) = o(h). \end{aligned}$$

O que significa $f(h) \equiv 0$, e a probabilidade $p_h := \mathbb{P}(N(\pi + h) - N(\pi) = 1)$ não pode ser representada como $h + o(h)$.

Exercício 2

(2 pontos) Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson não homogêneo com taxa $\lambda(t) = t$. Achar de forma numérica da média e variância de instante da primeira ocorrência S_1 .

Solução:

A densidade da n -ésima ocorrência de um Processo de Poisson com taxa $\lambda(t)$ é dada pela seguinte expressão:

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} \cdot \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}$$

de modo que $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. Em nosso caso $m(t) = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}$. Então a densidade para a primeira ocorrência é:

$$f_{S_1}(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$$

Por definição a média é:

$$\int_0^\infty t \cdot [te^{-\frac{t^2}{2}}]dt$$

Utilizando o programa do site , <https://www.wolframalpha.com> podemos calcular esta integral da seguinte forma :

integrate t * t * exp(-(t^2/2)) dt from t = 0 to Inf

Que resulta em $\mathbb{E}(S_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.25$

Da mesma forma podemos calcular a variância, por definição a variância é:

$$\text{Var}(S_1) = \mathbb{E}(S_1^2) - (\mathbb{E}(S_1))^2$$

Basta calcularmos $\mathbb{E}(S_1^2)$:

$$\mathbb{E}(S_1^2) = \int_0^\infty t^2 \cdot [te^{-\frac{t^2}{2}}] dt$$

Calculamos a partir da seguinte expressão no site do Wolfram Alpha:

integrate t^2 * t * exp(-(t^2/2)) dt from t = 0 to Inf

Que resulta em $\mathbb{E}(S_1^2) = 2$. Portanto

$$\mathbb{V}ar(S_1) = \mathbb{E}(S_1^2) - (\mathbb{E}(S_1))^2 = 2 - (1.25)^2 \cong 0.44$$

Exercício 3

(1 ponto) Seja $X(\cdot)$ um Processo de Poisson composto: $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$, em que $N(\cdot)$ é processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$ e (ξ_i) são variáveis aleatórias com distribuição binomial $B(4, 0.5)$. Achar a esperança $E(X(t))$.

Solução:

Utilizando a definição da esperança condicional temos que :

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t)))$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t) = n)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \mid N(t) = n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mid N(t) = n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \\ &= n \cdot \mathbb{E}(\xi) \\ &= n \cdot 2 \quad \text{assim} \\ \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t))) &= 2N(t). \end{aligned}$$

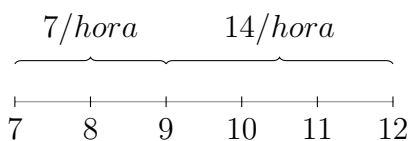
Logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t))) \\ &= \mathbb{E}(2N(t)) \\ &= 2 \cdot \mathbb{E}(N(t)) \\ &= 2 \cdot (1 \cdot t) = 2t \end{aligned}$$

Exercício 4

(1 ponto) Num pedágio das 7 hs até meia-dia os carros passam de acordo com o processo de Poisson não homogêneo com a taxa $\lambda(t)$: durante o tempo das 7 hs até 9 horas a taxa desse processo é de 7 carros por hora, e das 9 hs até meio-dia a taxa é 7 carros por meia hora. Qual é a distribuição do número de carros que passam nesse pedágio das 8 hs até 11 horas, e achar número médio.

Solução:



Como os incrementos são independentes então a distribuição de carros que passam neste pedágio das 8 até as 11 horas pode ser escrita como a soma de duas distribuições de poisson. O processo de poisson no intervalo $[7,9]$ e o processo no intervalo $[9,12]$.

A taxa do processo é:

$$\begin{aligned}\int_8^{11} \lambda(t)dt &= \int_8^9 7dt + \int_9^{11} 14dt \\ &= 7 + 2 \cdot 14 \\ &= 35\end{aligned}$$

Portanto a distribuição é Poisson(35) cuja média é 35 carros.