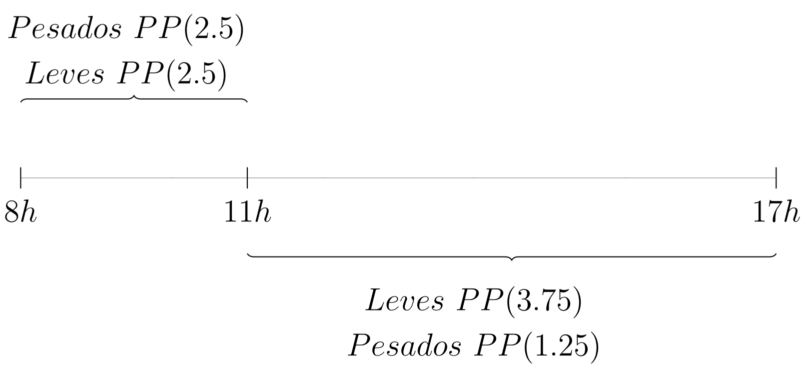
Lista 5 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito[1]

Exercício 1

Modelamos um fluxo de carros que passam pelo um ponto de policia rodoviária das 8 de manha até 20 horas como um processo de Poisson $N(\cdot)$ com a taxa de 5 carros por minuto. A policia classifica carros como de dois tipos: pesados e leves. As estatísticas anteriores mostram que das 8 horas até 11 horas 50% dos carros são carros pesados e das 11 até 17 horas essa porcentagem cai pela metade.

Solução:

(a)(0.5 ponto) Qual é a distribuição de carros pesados que passam das 10 até 12 horas?



Como a passagem dos carro é independente, temos que no período de tempo entre 10h - 11h o fluxo de carros pesados segue o processo de Poisson$(2.5 \cdot 60)$, ou seja, tem taxa 150 carros por hora, ou seja, a distribuição de carros pesados durante uma hora entre 10h e 11h é a distribuição de Poisson com a média 150 carros.

De forma análoga no intervalo de tempo de 11h - 12h a distribuição de carros pesados é um Processo de Poisson com taxa 75 carros por hora, ou seja, a distribuição de carros pesados durante uma hora entre 11h e 12h é a distribuição de Poisson com a média 75 carros.

Portanto a distribuição de carros pesados que passam das 10 até 12 horas é a distribuição da soma do número de carros pesados nos dois intervalos.

Seja CP_1 e CP_2 o número de carros nos intervalos 10h-11h e 11h-12h respectivamente. Como vimos $CP_1 \sim Poi(150)$ e $CP_2 \sim Poi(75)$, então $CP_1 + CP_2 \sim Poi(150 + 75)$, ou seja, o número de carros pesados que passam durante o tempo das 10 até 12 horas tem a distribuição de Poisson com a média 225 carros. Ou, lembrando a prova disso:

[1]Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Maio, 2020

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(CP_1 + CP_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(CP_1 + CP_2 = k, CP_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(CP_2 = k - i, CP_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(CP_2 = k - i) \cdot \mathbb{P}(CP_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-75} \cdot 75^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-150} \cdot 150^{i}}{(i)!} \\
&= \frac{e^{-(150+75)} \cdot (150+75)^{k}}{(k)!}
\end{aligned}
$$

Portanto $CP_1 + CP_2$ tem distribuição de Poisson com média de 225 carros.

(b)(1 ponto) Das 17 até 20 horas a probabilidade de um carro ser carro pesado diminua em forma exponencial: $p_1(t) = 0.25e^{-2(t-17)}$, $t \in [17, 20]$ (observe que tempo t medido em horas). Achar a distribuição de carros leves durante esse período.

A distribuição de carros leves entre 17-20h é Poisson($300 \cdot \int_{17}^{20} (1 - 0.25) \cdot e^{-2(t-17)} dt$):

$$
\int_{17}^{20} 0.75 e^{-2(t-17)} dt = 0.75 \left(-\frac{e^{-2(t-17)}}{2} \right) \Big|_{17}^{20} = 0.75 \left(-\frac{e^{-6}}{2} + \frac{1}{2} \right) \cong 0.37
$$

Portanto o número de carros leves que passam durante 3 horas entre 17h-20h tem a distribuição de Poisson com a média $300 \cdot 0.37 \cong 112$.

(c)(0.5 ponto) Qual é a média de numero de carros que passam pelo ponto policial durante o dia das 8 até 20 horas.

Como queremos a média de carros que passam independente do tipo de carro então basta saber qual a taxa do processo. Do enunciado do exercício sabemos que a passagem de carros (independente do tipo) é um processo de Poisson com taxa de 5 carros por minuto. Logo para o período de 8h-20h a média de carros é $5 \cdot 60 \cdot 12 = 3600$.

Exercício 2

Em condições do item anterior, sabe-se que das 10 até 11 horas passaram 330 carros.

Solução:

(a)(0.5 ponto) Qual é a distribuição de carros pesados que passam durante esse período (das 10 até 11 horas)?

Considere CP e CL como o número de carros que pesados e leves respectivamente, que passaram durante o período de 10 a 11 horas. Sabemos que $CP + CL = 330$. Sabemos também que a proporção de carros pesados e a proporção de carros leves são iguais, o que significa que um carro (entre esses 330) que passa é classificado como um carro leve com a probabilidade 0.5, o mesmo vale para carro pesado. O que significa em sua vez, que o número de carros leves tem a distribuição binomial $B(330, 0.5)$.

Ou o mesmo com mais explicitamente com a prova: a distribuição de carros pesados pode ser obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(CP = c \mid CP + CL = 330) &= \frac{\mathbb{P}(CP = c, CP + CL = 330)}{\mathbb{P}(CP + CL = 330)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(CP = c) \cdot \mathbb{P}(CL = 330 - c)}{\mathbb{P}(CP + CL = 330)} \\
&= \frac{\frac{e^{-2.5} \cdot 2.5^c}{c!} \cdot \frac{e^{-2.5} \cdot 2.5^{(330-c)}}{(330-c)!}}{\frac{e^{-5} \cdot 5^{330}}{330!}} \\
&= \frac{330!}{c! \cdot (330 - c)!} \cdot 2.5^c \cdot 2.5^{(330-c)} \cdot 5^{-330} \\
&= \binom{330}{c} \cdot (0.5)^c \cdot (0.5)^{330-c},
\end{aligned}$$

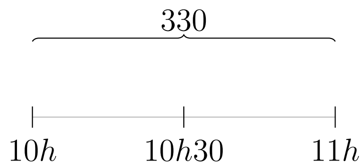
em que $c = 0, 1, \ldots, 330$. Portanto tem distribuição Binomial $B(330, 0.5)$.

(b)(0.5 ponto) Qual é a média de número de carros pesados que passam das 10:30 até 11:30?

Podemos utilizar o fato que os incrementos são independentes no processo, portanto a média de carros pesados entre 10:30 e 11:30 é a soma da média de carros entre 10:30 e 11 horas, com a média de carros entre 11 e 11:30.

Pela propriedade do processo de Poisson a média de carros pesados entre 11 e 11:30 é $5 \cdot 30 \cdot 0.25 = 37.5$.

A média de carros entre 10h30 - 11 horas está condicionada pelo fato que tivemos 330 carros entre 10 e 11 horas.



Pela propriedade do processo de Poisson condicionado no numero de eventos ocorridos durante intervalo $(10, 11)$ o momento que um carros que passa durante esse tempo, pode ser modelado atrvés de distribuição uniforme neste intervalo, $U(10, 11)$. Ou seja, o momento X_i que o i-ésimo carro passou pelo ponto policial, se for maior que 10h30 pode ser escrito como:

$$\mathbb{P}(X_i > 10.5) = 0.5,$$

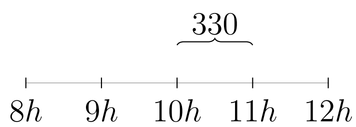
em que $X_i \sim U(10, 11)$. O que significa que a distribuição de número de carros que passam durante intervalo $(10.5, 11)$ tem a distribuição binomial $B(330, 0.5)$. O que significa que dos 330 carros, em média 165 são carros que passam durante intervalo $(10.5, 11)$ e metade deles são carros pesados. Assim a média de número de carros pesados que passam durante intervalo $(10.5, 11)$ é $165/2 = 82.5$.

Concluimos que entre 10h30 até 11 horas em média passam 82.5 carros pesados e entre 11 horas e 11h30 passam em média 37.5 carros pesados. No total temos que passaram em média 120 carros pesados durante intervalo entre 10h30 até 11h30.

(c) (0.5 ponto) Qual é a média de número de carros leves que passam das 10:30 até 11:30?

De forma análoga ao exercício anterior temos que entre 10h30 até 11 horas em média passam 82.5 carros leves e entre 11 horas e 11h30 passam em média 112.5 carros leves. No total temos que passaram 195 carros leves em média.

(d) (0.5 ponto) Qual é a média de número de carros que passam das 8 até 12 horas?



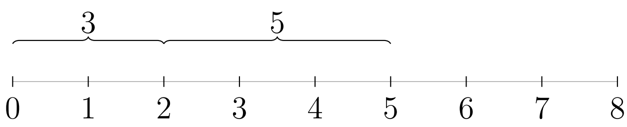
A média de carros que passam no intervalo de 8 a 10 horas é $5 \cdot 60 \cdot 2 = 600$ carros e entre 11 e 12 horas passam em média $5 \cdot 60 = 300$.

Portanto no total em média passam 1230 carros, independente do tipo, entre 8 e 12 horas.

Exercício 3

Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson com taxa λ. Sabe-se que $N(2) = 3$ e $N(5) = 8$.

Solução:



(a)(1 ponto) Achar a distribuição cumulativa da primeira ocorrência em intervalo [2, 8].

Temos que avaliar a distribuição da primeira ocorrência no intervalo [2,8], já sabemos que no intervalo [2,5] ocorreram 5 eventos.

Então neste intervalo de tamanho 3, o momentos $X_i, i = 1, \dots, 5$ que os eventos ocorrem tem distribuição uniforme no intervalo, $X_i \sim U(2,5), i = 1, \dots, 5$ portanto a primeira ocorrencia no intervalo $(2,8)$ é a primeira ocorrencia no intervalo $(2,5)$, o que é o minimo entre os cinco momentos $T_{[2,5]} := \min(X_1, \dots, X_5)$. Assim, distribuição cumulativa para a primeira ocorrência pode ser escrita como: seja $t \in (2,5)$, então

$$F_1(t) = \mathbb{P}(T_{[2,5]} \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_5) > t) = 1 - (\mathbb{P}(X_1 > t))^5 = 1 - \left(\frac{5-t}{3}\right)^5$$

ou seja

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 2, \\ 1 - \left(\frac{5-t}{3}\right)^5, & \text{se } t \in (2,5), \\ 1, & \text{se } t \geq 5. \end{cases}$$

(b)(0.5 ponto) Qual é a média de número de ocorrências em intervalo [1, 4]?

Lembrando que a distribuição do momento em que os eventos ocorreram em um intervalo sabendo o número de eventos é uniforme, então para os dois intervalos, [1,2] e [2,4] temos que: sejam $X_i \sim U(0,2), i = 1,2,3$ e $Y_i \sim U(2,5), i = 1, \dots, 5$

$$(N(2) - N(1) \mid N(2) = 3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{1}(X_i > 1) \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

$$(N(4) - N(2) | N(5) - N(2) = 5) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{1}(Y_i < 4) \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right)$$

Portanto o número médio de ocorrências é $3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cong 4.8$ eventos.

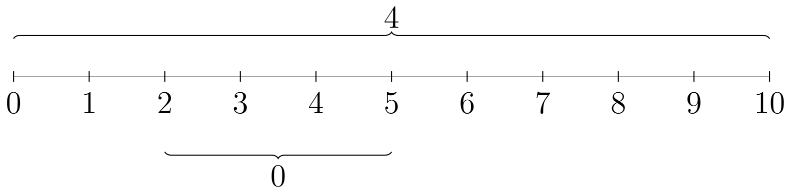
(c)(0.5 ponto) Qual é a média de número de ocorrências em intervalo [1, 10]?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N(10) - N(11)) &= \mathbb{E}(N(10) - N(5) + N(5) - N(2) + N(2) - N(1)) \\ &= \mathbb{E}(N(10) - N(5)) + \mathbb{E}(N(5) - N(2)) + \mathbb{E}(N(2) - N(1)) \\ &= \lambda \cdot 5 + 5 + 1.5 \\ &= 5\lambda + 6.5 \end{aligned}$$

Exercício 4

Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson com taxa λ. Sabe-se que $N(10) = 4$. Sabendo adicionalmente que $N(5) - N(2) = 0$.

Solução:



(a) (1 ponto) escrever a fórmula ou construir o gráfico de função de distribuição cumulativa de número de eventos que ocorrem em intervalo [5, 10];

Seja X é numero de eventos em intervalo [5, 10], assim X pode ter um dos valores $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pela distribuição uniforme em conjunto de intervalos $[0, 2]$ e $[5, 10]$ deduzimos que a probabilidade de um ponto uniformemente distribuido em $[0, 2] \cup [5, 10]$ cair em intervalo $[5, 10]$ é $\frac{5}{7}$. O que significa diretamente que X tem a distribuição binomial, $X \sim B\left(4, \frac{5}{7}\right)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{5}{7}\right)^k \left(\frac{2}{7}\right)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(b) (0.5 ponto) achar a média de número de ocorrências em intervalo [1, 4];

Sabemos que no intervalo [2,4] ocorreram 0 eventos, então temos que saber o número médio de eventos que ocorrem no intervalo [1,2].

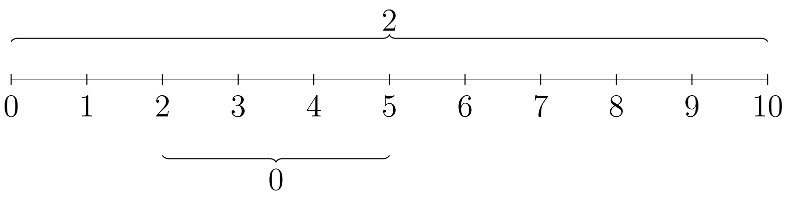
O tamanho do intervalo $[0, 2] \cup [5, 10]$ é 7, portanto em média no intervalo [1,2] ocorreram $4 \cdot \frac{1}{7} \cong 0.57$.

(b)(0.5 ponto) achar a média de número de ocorrências em intervalo [1, 10].

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(10) - N(1) \mid N(10) = 4) &= \mathbb{E}(N(10) - N(0) - (N(1) - N(0)) \mid N(10) = 4) \\
&= \mathbb{E}(N(10) - N(0) \mid N(10) = 4) - \mathbb{E}(N(1) - N(0) \mid N(10) = 4) \\
&= 4 - \frac{4}{7} \cong 3.42.
\end{aligned}$$

Exercício 5

(2 pontos) Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson com taxa λ. Sabe-se que $N(10) = 2$. Sabendo adicionalmente que $N(5) - N(2) = 0$. Achar a distribuição cumulativa da primeira ocorrência $T_{[5,10]}$ em intervalo $[5, 10]$. Combinamos que caso não há ocorrências neste intervalo definimos o valor de $T_{[5,10]}$ como 0.



Observa-se primeiro, que a distribuição de $T_{[5,10]}$ tem um "atom"em ponto 0. Seja X número de eventos em intervalo [5,10], então $X \sim B\left(2, \frac{5}{7}\right)$

$$\mathbb{P}(T_{[5,10]} = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \neq 0.$$

Segundo, observamos que caso há eventos em [5,10], então o momento de ocorrencias tem a distribuição uniforme em [5,10]. Sejam Y_i uma sequencia de variáveis aleatórias i.i.d. e uniformemente distribuidas em [5,10]. Supondo $t \in [5, 10]$, então

$$\begin{aligned} F(t) = \mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t) &= \mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 0)\mathbb{P}(X = 0) \\ &+ \mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 1)\mathbb{P}(X = 1) \\ &+ \mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 2)\mathbb{P}(X = 2) \end{aligned}$$

Observe, que para qualquer $t \in [5, 10]$

$$\mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 0) = 1.$$

Observe, que $T_{[5,10]} \sim U[5, 10]$ se $X = 1$, e

$$\mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 1) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t) = \frac{t-5}{5}.$$

Finalmente, se $X = 2$, temos duas ocorrências em [5,10] com momentos de ocorrência uniformemente distribuidas em [5,10]. Por isso $T_{[5,10]} = \min(Y_2, Y_3)$ em distribuição. Assim,

$$\mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t \mid X = 2) = \mathbb{P}(\min(Y_2, Y_3) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(Y_2, Y_3) > t) = 1 - \left(\frac{10-t}{5}\right)^2.$$

Voltando para $F(t)$, se $t \in [5, 10]$ obtemos

$$\begin{aligned} F(t) = \mathbb{P}(T_{[5,10]} \leq t) = 1 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ + \frac{t-5}{5} \cdot 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \\ + \left(1 - \left(\frac{10-t}{5}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2, \end{aligned}$$

e, finalizando, obtemos

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0; \\ \left(\frac{2}{7}\right)^2, & \text{se } 0 \leq t < 5; \\ \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{t}{5} + \left(1 - \left(\frac{10-t}{5}\right)^2\right) \left(\frac{5}{7}\right)^2, & \text{se } 5 \leq t \leq 10; \\ 1, & \text{se } t > 10. \end{cases}$$