

# 7600017 - Introdução à Física Computacional - 2020

## Quinto Projeto

### Instruções

- Crie um diretório `proj5_#usp` em `/public/IntroFisComp20/projeto5`
- Proteja seu diretório para não ser lido por `g` e `o`
- Deixe no diretório apenas 3 arquivos, de nomes `exer1.f90`, `rel.tex` e `rel.pdf`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída`
- Use **precisão dupla em seus resultados**
- **Note: se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente**

### Dinâmica Populacional

Em princípio, a equação diferencial que utilizamos anteriormente para descrever o decaimento radioativo de uma amostra de  $N(t)$  átomos como função do tempo  $t$

$$dN(t) = \alpha N(t) dt, \quad (1)$$

sendo  $\alpha$  uma constante negativa, pode também descrever o crescimento populacional de um grupo de seres vivos, se tomarmos  $\alpha$  positivo. De fato, nos dois casos, o decréscimo (respectivamente aumento)  $dN(t)$  no número de **indivíduos** em um certo intervalo de tempo deve ser proporcional a  $N(t)$  e ao intervalo  $dt$ , levando à equação acima. No caso de aumento populacional, porém, é fácil ver que o comportamento descrito não seria realístico, já que a equação prevê um crescimento exponencial sem limites. Claramente, devem ser levados em conta outros aspectos nesse caso, como a presença de predadores, escassez de recursos, morte dos indivíduos, etc. Para uma descrição simplificada, podemos limitar o crescimento da população impondo um **corte** se o número atingir um valor máximo  $N_{max}$ .

Nosso objetivo será estudar as condições para que um dado valor inicial para o número  $N$  de indivíduos na população permaneça constante com o tempo, ou seja vamos procurar por um ponto fixo do mapeamento que leva  $N(t) \approx N_i$  a  $N(t + \Delta t) \approx N_{i+1}$ .

Como veremos, o estudo desse mapeamento (muito simples) vai revelar uma grande complexidade e dependência sensível das condições iniciais, definindo um **comportamento caótico** que ilustraremos em nossos exercícios.

Vamos primeiramente discretizar a equação (1), i.e. vamos considerar instantes de tempo sucessivos  $t$  e  $t + \Delta t$  com  $\Delta t$  fixo, não necessariamente pequeno. (Por exemplo,  $\Delta t$  pode ser o tempo de uma geração de indivíduos.) A equação fica

$$N_{i+1} = (1 + \alpha\Delta t)N_i \approx rN_i, \quad (2)$$

onde definimos uma nova constante positiva  $r = 1 + \alpha\Delta t > 1$ . Vamos agora impor o limite máximo  $N_{max}$  para o número de indivíduos, da forma

$$N_{i+1} = rN_i \left(1 - \frac{N_i}{N_{max}}\right). \quad (3)$$

A descrição será mais simples se mudarmos de variáveis para  $x_i \approx N_i/N_{max}$ , levando a

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad (4)$$

sendo  $x_i \in [0, 1]$ . Note que a Equação (4) define um mapeamento - isto é uma relação de recorrência, ou mapa -  $G(x_i)$  levando de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ . Buscamos, portanto, os pontos fixos do mapa  $G(x) = rx(1 - x)$ . Isso pode ser feito computacionalmente **iterando-se** a Equação 4 a partir de diferentes condições iniciais e procurando por convergência. O mesmo pode ser feito graficamente, determinando-se os pontos de intersecção da curva  $G(x)$  e a reta  $x$ . Claramente, as soluções para o problema dependerão do valor da constante  $r$ . Neste projeto, portanto, não vamos integrar uma equação diferencial, mas estudar a evolução do mapa  $G(x)$ , o chamado **mapa logístico**. Crie um arquivo [rel.tex](#), compile com o comando `pdflatex` e produza assim o arquivo [rel.pdf](#), correspondendo ao relatório. Seu relatório deve seguir as especificações abaixo.

## Tarefa A: Tratamento Geral

Investigue a ocorrência de pontos fixos para o mapa  $G(x)$ , isto é encontre valores  $x^*$  tais que  $G(x^*) = x^*$ , para um dado valor de  $r$ . Primeiramente, considere as propriedades de  $G(x)$  (esboce seu gráfico, etc.) e note que:

- (i)  $x^* = 0$  é sempre uma solução
- (ii)  $r$  deve estar entre 1 e 4 (por quê?)
- (iii) dado que  $0 \leq r \leq 4$ , há uma outra solução válida para  $x^*$ . Determine-a.

Através do gráfico de  $G(x)$  e da reta  $x$ , visualize a iteração do mapa  $G(x)$  a partir de uma condição inicial  $x_0$ , notando que a sequência  $x_i \leftarrow G(x_i) = x_{i+1} \leftarrow G(x_{i+1})$  pode ser **desenhada** com traços retos partindo do eixo  $x$  no ponto  $x_0$  e continuando alternadamente na vertical até atingir a curva  $G(x_0)$ , na horizontal até atingir a reta  $x = x_1$  e assim sucessivamente. (Note que tal gráfico contém a mesma informação que a **evolução temporal**  $i, x_i$ . Estude também a evolução temporal, para vários valores de  $x_0$ , verificando que os pontos fixos  $x^*$  sejam realmente **fixos**, e o que acontece para valores

iniciais próximos desses pontos.) Procure fazer esse gráfico - iniciando por exemplo de  $x_0 = 0.2$  - para os valores  $r = 1$ ,  $r = 2$  e algumas iterações, até que esteja claro que houve convergência para um valor de  $x$ . Esse valor está de acordo com seu cálculo no item (iii) acima? Repita agora o gráfico para  $r = 3$ . A figura ficou mais interessante! o que está ocorrendo?

Inclua os resultados de suas investigações (cálculos, gráficos, respostas às perguntas acima) em seu relatório.

## Tarefa B: Rumo ao Caos

Como vimos acima, não basta ser um ponto fixo do mapa  $G(x)$  para um valor de  $x$  ser **estável** na evolução da população estudada. De fato, se  $x_0$  for ponto fixo seu valor permanecerá constante, mas o que ocorre para valores iniciais  $x_0$  arbitrários, próximos (ou não) do ponto fixo, depende da estabilidade do ponto fixo, que por sua vez depende do valor do parâmetro  $r$ . Para  $r$  maior do que 3 (e menor do que aproximadamente 3.5) o ponto fixo  $x^*$  calculado no exercício acima torna-se instável, e o mapa **converge** para um comportamento oscilatório, entre dois valores  $x_1$  e  $x_2$ . Sabendo disso, como você encontraria os valores  $x_1$  e  $x_2$ ? Realize mais testes da evolução do sistema, aumentando progressivamente o valor de  $r$  e verificando que para valores logo acima de  $r \approx 3.545$  o ciclo de oscilação será entre quatro valores **fixos**. Esse fenômeno é conhecido como duplicação de período, e é observado logo **antes da ocorrência de caos** no sistema. Vamos portanto investigar a instauração do caos, procurando por duplicações sucessivas de período, e anotando os valores correspondentes de  $r$  em que elas começam a ocorrer. Tome agora a razão entre diferenças de valores sucessivos de  $r$ , e verifique que esse valor é constante (!)

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \quad (5)$$

Calcule assim a constante de Feigenbaum  $\delta$  e compare o valor obtido ao dado na literatura. Dessa forma você pode prever para qual valor de  $r$  a duplicação de períodos será infinita, e a partir desse valor de  $r$  o sistema perde completamente a previsibilidade. Registre seus resultados no relatório.

## Tarefa C: O Caos!

Agora que sabemos que o sistema evoluirá para o caos à medida que aumentamos a constante  $r$ , vamos implementar o cálculo do chamado expoente de Lyapunov, que de certa forma quantifica a falta de controle que temos sobre o número de indivíduos da população a partir de um número inicial  $x_0$ . De fato, a perda de controle é melhor ilustrada em termos da sensibilidade da evolução temporal às condições iniciais, o que tomamos como definição do caos. Dessa forma investigaremos se duas histórias que começam praticamente idênticas permanecem próximas ou se, como frequentemente observamos em fenômenos realísticos, uma pequena diferença em  $x_0$  levará a evoluções temporais dramaticamente diversas.

Calculemos, portanto, a diferença entre  $G^{(i)}(x_0)$  - definida como aplicação do mapa  $i$  vezes a partir da condição inicial  $x_0$  - e  $G^{(i)}(x_0 + \epsilon)$ . O mesmo pode ser feito numerica-

mente, em código `fortran`. Estime o valor de

$$d(i) = |G^{(i)}(x_0 + \epsilon) - G^{(i)}(x_0)| \quad (6)$$

como função de  $i$ , e obtenha seu comportamento para tempos longos, verificando que ele é exponencial e calculando o expoente  $\lambda$  correspondente, o expoente de Lyapunov. Realize seus testes para  $r < 3$  e para  $r > 3.6$ .

Outra forma de estimar  $\lambda$  é supor um comportamento exponencial para  $d$  com o tempo  $i$  e relacioná-lo à derivada do **mapa**  $G^{(i)}(x)$ , i.e. a  $i$ -ésima aplicação de  $G(x)$  como definido acima, notando que  $\epsilon$  é pequeno. Fazendo isso e utilizando a regra da cadeia múltiplas vezes, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ln|G'(x_j)| \quad (7)$$

onde os  $x_j$  foram obtidos por aplicação de  $G(x)$  a partir do valor inicial  $x_0$ . Simplifique a expressão acima para o mapa  $G(x) = rx(1-x)$  e realize o cálculo numericamente (usando seu programa), comparando ao valor de  $\lambda$  obtido no limite de grandes valores de  $i$  como acima. Inclua seus resultados no relatório. Em seu programa [exer1.f90](#) leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- $r$
- $x_0$
- $\epsilon$

A saída do programa é dada por:

- A)** Um arquivo: `dist_out.dat` contendo respectivamente (em cada linha) os dados: tempo  $i$ , população  $x_i$  (a partir de  $x_0$ ), distância  $d(i)$ , em três colunas.
- B)** O valor de  $\lambda$  obtido diretamente pelo decaimento exponencial e também o valor estimado pela soma na Eq. (7). Forneça os dois valores no terminal, cada um em uma linha (como última palavra da linha).

Programe seu código para calcular  $d$  até que o comportamento exponencial esteja bem evidenciado, e calcule assim o valor de  $\lambda$ , descartando (se necessário) as primeiras iterações do mapa.

**Nota: utilize como dados para teste:  $r = 3.6$ ,  $x_0 = 0.1$ ,  $\epsilon = 10^{-5}$  e número máximo de iterações 1000.**