Equações Diferenciais a Derivadas Parciais

Como vimos no início deste curso, equações diferenciais ordinárias são uma relação entre uma função a uma variável e suas derivadas.

Equações diferenciais a derivadas parciais (EDP) relacionam uma função multivariada com suas derivadas. Seja $u(x,y)$ uma função a duas variáveis. Então, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ é uma equação diferencial a derivadas parciais.

A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ também pode ser escrita com a seguinte notação: u_x. Com essa notação, a equação anterior será dada por:

ⓐ $u_x + u_y = 0$

Outros exemplos:

ⓑ $u_x + u \cdot u_y = 0$

ⓒ $x^2 \cdot u_{xx} + u_{xy} + 3u_x - u = e^{x+y}$

ⓓ $u_{xxy} - u \cdot u_x + \sin(x \cdot u^2) = 0$

ⓔ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, sendo $u \equiv u(x,y,z)$

ⓕ $u_{xyzz} + 2u_{zz} - u = \sin(x^2 + y \cdot z)$

A ordem de uma E.D.P. é igual à ordem de sua derivada mais elevada:

ⓐ 1ª ordem

ⓑ 1ª ordem

ⓒ 2ª ordem

ⓓ 3ª ordem

ⓔ 2ª ordem

ⓕ 4ª ordem

E.D.P.s Lineares

São combinações lineares das derivadas parciais da função, onde os coeficientes da combinação linear são funções das variáveis independentes. A forma geral de uma E.D.P. é:

Se $u(x,y)$ é uma função das variáveis independentes x e y, então:

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_{nm}(x,y) \cdot \frac{\partial^{n+m} u(x,y)}{\partial x^m \cdot \partial y^n} = g(x,y) \quad (\text{ordem}: N+M)$$

- Se $g(x,y)=0 \Rightarrow$ E.D.P. é dita linear - homogênea
- Se $g(x,y) \neq 0 \Rightarrow$ E.D.P. é dita linear não-homogênea

Nos exemplos que mostramos:

a) Linear homogênea a coeficientes constantes
b) Não-linear homogênea
c) Não-homogênea, mas linear
d) Não-linear homogênea
e) Linear homogênea a coeficientes constantes
f) Linear não-homogênea

E.D.P.'s de 1ª ordem lineares são da forma:

$a(x,y).u_x + b(x,y).u_y + c(x,y).u = f(x,y)$, sendo a, b, c e f são funções fornecidas.

E.D.P.'s de 2ª ordem lineares são da forma:

$$a(x,y).u_{xx} + b(x,y).u_{xy} + c(x,y).u_{yy} + d(x,y).u_x + e(x,y).u_y + f(x,y).u = g(x,y).$$

A solução de E.D.P.'s lineares, em geral, é consideravelmente mais fácil que a solução de E.D.P's não-lineares. Muitas E.D.P.'s não-lineares somente podem ser resolvidas de forma aproximada, a partir do uso de métodos numéricos. Neste curso serão abordadas E.D.P.'s lineares com aplicações à área de geociências.

Propriedades das E.D.P.'s

Considerando a função $u(x,y)$, seja uma E.D.P. muito simples dada por:

$$u_x = 0 \qquad (329)$$

É evidente que $u_x = 0$ (função nula) significa que u não depende da variável x. Qualquer função do tipo $\varphi(y)$ é solução da equação (329). Dessa forma, podemos escrever que a solução de (329) é:

$$u(x,y) = \varphi(y) \qquad (330)$$

Sendo que $\varphi(y)$ é uma função arbitrária.

Exemplo 1: Considerando a E.D.P. $u_y = \varphi(y)$, a mesma pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int u_y.dy = \int \varphi(y)dy + C(x) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int \varphi(y)dy + \underbrace{C(x)}_{\text{função arbitrária}}} \rightarrow \text{Solução}$$

Verificando a solução:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int \varphi(y)\,dy + C(x)\right] = \varphi(y) + 0$$

Exemplo 2: Dada a E.D.P. $u_y = \cos(y)$, determine a solução geral:

Solução: Para obter a solução geral, basta integrarmos u_y em relação a y, tal que:

$$u(x,y) = \int u_y \, dy = \int \cos(y)\,dy = \boxed{\sin(y) + \varphi(x)}$$

↳ solução geral

sendo $\varphi(x)$ uma função arbitrária. Assim,

$$\sin(y), \; x^2 + \sin(y), \; \tan(x) + \sin(y), \; \frac{1}{x} + \sin(y)$$

são todas soluções particulares dessa E.D.P.

Exemplo 3: Seja a E.D.P. $x \cdot u_x + y \cdot u_y = 0$ uma E.D.P. linear homogênea. Verifique que $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ é solução geral dessa E.D.P.

Solução: Basta derivarmos $u(x,y)$ em relação a x e y e substituirmos essas derivadas na E.D.P.:

$$u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u_x(x,y) = -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ e } u_y(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

As funções $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$, $\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ são soluções particulares dessa E.D.P.

Exemplo 4: Verifique que $u(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ é solução geral da E.D.P. $y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0$, sendo φ uma função a uma variável derivável. $u_x(x,y) = 2x \cdot \varphi'(x^2+y^2)$, $u_y = 2y \cdot \varphi'(x^2+y^2) \Rightarrow$
$y \cdot 2x \cdot \varphi'(x^2+y^2) - x \cdot 2y \cdot \varphi'(x^2+y^2) = 2x \cdot y\,\varphi'(x^2+y^2) - 2xy \cdot \varphi'(x^2+y^2) = 0$

E.D.P. de 2ª ordem

E.D.P.'s de segunda ordem do tipo $u_{xy} = 0$ podem ser reduzidas a uma E.D.P. de 1ª ordem. No caso citado, $\frac{\partial u}{\partial y} = v(x,y)$, então $u_y = v_x$. Assim, $v_x = 0 \Rightarrow v(x,y) = \varphi(y)$. Como $u_y = v(x,y)$, então $u_y = \varphi(y)$, cuja solução geral é $u(x,y) = \int \varphi(y)\,dy + \psi(x)$, sendo φ e ψ funções arbitrárias.

Condições Iniciais e de Contorno

Uma diferença importante entre E.D.O.'s e E.D.P.'s é a informação suplementar necessária para a unicidade da solução. Por exemplo, na solução geral de uma E.D.O. linear aparecem uma ou mais constantes arbitrárias: podemos determinar essas constantes impondo condições iniciais. isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto. Podemos, também, obter unicidade, no caso de intervalos finitos, impondo condições nos extremos dos intervalos, as chamadas condições de contorno.

A situação para as E.D.P.'s é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

No caso de E.D.P.'s, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. É natural substituir os extremos do intervalo, para o caso $n=1$, ou seja, $\mathbb{R}$, pela borda $\partial\Omega$ da região Ω. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas na borda da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno ou, simplesmente, problema de contorno. Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo). Encontramos, muitas vezes, condições do tipo:

$$\alpha . u(x) + \beta . \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \qquad (331)$$

sendo α e β constantes dadas, f uma função dada em $\partial\Omega$ e $\partial u/\partial n$ a derivada de u na direção normal à $\partial\Omega$. No caso em que $\beta = 0$, a condição imposta pela equação (331) é conhecida como condição de Dirichlet. No caso em que $\alpha = 0$, temos uma condição de Neumann.

Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de E.D.O.'s) para E.D.P's? Como no caso de E.D.P.'s temos mais de uma variável dependente (por exemplo, x e t), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo, $t=0$) e impor o valor da solução e suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, f e g funções dadas). Observe que quando $n=2$, com variáveis x, t, por exemplo, isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t=0$. Analogamente, no caso $n=3$, com variáveis x, y, t, fixar $t=0$ significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície $t=0$. Podemos, então, generaliza o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva (se $n=2$) ou superfície (se $n=3$) inicial. O problema correspondente é um problema de valor inicial ou de Cauchy.

Em problemas físicos dependentes do tempo, como é o caso de fenômenos de difusão e de fenômenos oscilatórios, é muitas vezes conveniente separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y, z. O que ocorre muitas vezes é que os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem $K-1$ (supondo que a E.D.P. é de ordem K em t) são descritos no instante $t=0$ como função de x, y, z (condição inicial), ao mesmo tempo em que são impostas condições de contorno, para todo $t \geq 0$, em relação às variáveis espaciais. Tais problemas são chamados de problemas mistos.

Exemplo 1: O problema

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \qquad (332.a)$$

$$u(x, p(x)) = f(x), \; x \in \mathbb{R} \qquad (332.b)$$

Sendo $p(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R}$ funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a E.D.P. é de primeira ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial $y = p(x)$ no plano. Esse problema tem uma única solução.

Exemplo 2: O problema

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \qquad (333.a)$$

$$u(0, y) = f(y), \; y \in \mathbb{R} \qquad (333.b)$$

é também um problema de Cauchy envolvendo uma E.D.P. linear de primeira ordem. A curva inicial é o eixo dos y. Ao contrário do exemplo anterior, este problema não tem solução se f não é constante ou tem uma infinidade de soluções se f é constante.

Exemplo 3: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto limitado. Então o problema

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \qquad (334.a)$$

$$u(X, t) = 0, \; X \in \partial\Omega, \; t \geq 0, \qquad (334.b)$$

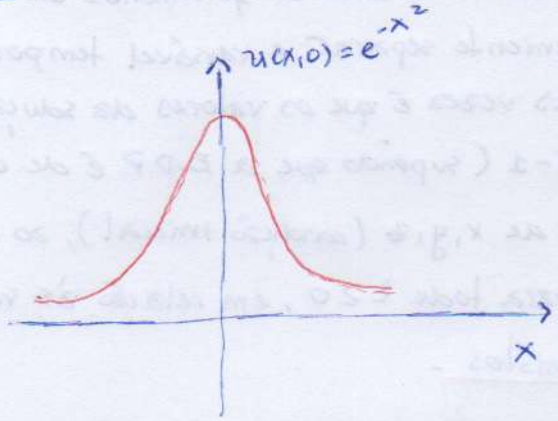
$$u(X, 0) = f(X), \; X \in \bar{\Omega} \qquad (334.c)$$

sendo $\bar{\Omega}$ um sólido e $X = (x, y, z)$ os pontos de $\mathbb{R}^3$, é um problema misto: a condição $u(X, t) = 0$ para $X \in \partial\Omega$ e $t \geq 0$ é uma condição de contorno, enquanto a condição $u(X, 0) = f(X)$ para $X \in \bar{\Omega}$ é uma condição inicial. Para que haja solução, f tem de satisfazer uma condição de compatibilidade

$$f(X) = 0, \quad \forall X \in \partial\Omega \qquad (335)$$

Em problemas mistos, a condição de contorno e a condição inicial não são inteiramente independentes e é preciso então que seja satisfeita uma condição de compatibilidade para que haja solução.

Exemplo 4: Determinar a solução particular da E.D.P. $u_t + 3u_x = 0$, sujeita à condição inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$



A solução geral é $u(x,t) = \varphi(x - a.t)$. Impondo-se a condição à solução geral, temos:

$$u(x,0) = e^{-x^2} = \varphi(x) \quad \therefore \quad \varphi(x) = e^{-x^2} \quad e \quad u(x,t) = \varphi(x - at) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(x-at)^2}}$$

↳ Solução particular que atende a condição inicial do problema

Exemplo 5: Sabendo-se que a solução geral da E.D.P. $u_{xx} - 2u_{xt} + u_{tt} = 0$ é $u(x,t) = x.\varphi(x+t) + t.\psi(x+t)$, sendo φ e ψ funções arbitrárias, determine a solução particular sujeita à condição inicial $u(x,0) = e^{-x}$ e a condição de contorno $u(0,t) = \cos(w.t)$

Solução: Impondo-se a condição de contorno, temos:

$$u(0,t) = t.\psi(t) = \cos(w.t) \Rightarrow \psi(t) = \frac{\cos(w.t)}{t}$$

Impondo-se a condição inicial, temos:

$$u(x,0) = x.\varphi(x) = e^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad \therefore$$

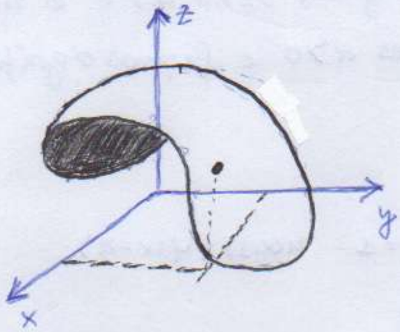
$$\psi(x+t) = \frac{\cos[w(x+t)]}{t+x} \quad e \quad \varphi(x) = \frac{e^{-(x+t)}}{x+t}$$

Logo, a solução particular sujeita as condições inicial e de contorno é:

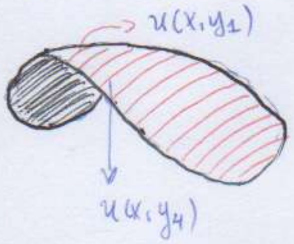
$$\boxed{u(x,t) = \frac{x.e^{-(x+t)}}{(x+t)} + \frac{t.\cos[w(x+t)]}{(x+t)}}$$

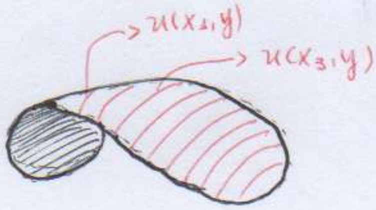
Visualização Gráfica de Soluções de E.D.P.'s

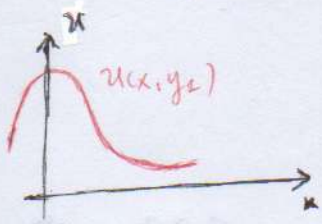
A solução de uma E.D.O. é uma função multidimensional ou multivariada. A visualização gráfica é relativamente simples para o caso de funções a duas variáveis, sendo mais difícil para o caso de três ou mais variáveis. Supondo que $u(x,y)$ seja solução de uma E.D.P., a mesma pode ser visualizada como uma superfície:

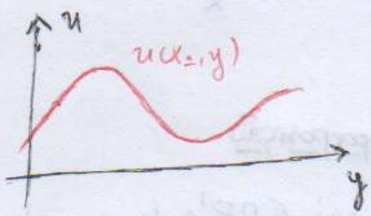


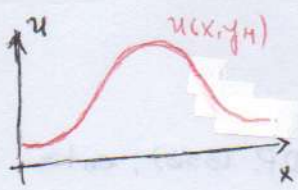
Outra forma de visualizar a solução é examinar seu comportamento relativo a cada variável independente em separado. Isso é feito construindo-se gráficos de $u(x,y_1)$, $u(x,y_2)$, $u(x,y_3)$, ... e gráficos de $u(x_1,y)$, $u(x_2,y)$, ...

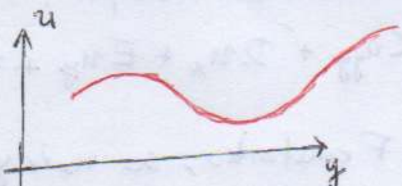




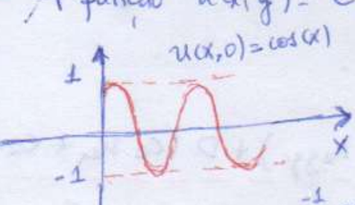


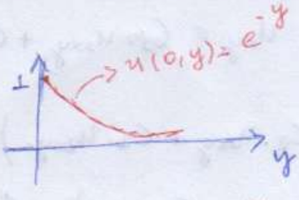


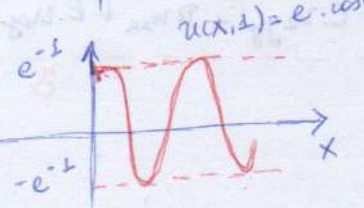


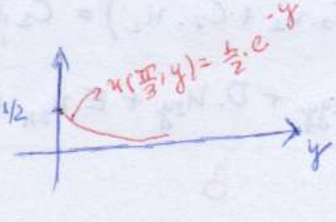


Exemplo: A função $u(x,y) = e^{-y} \cdot \cos x$





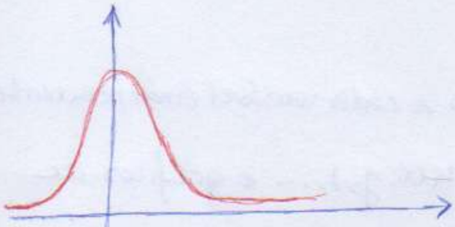




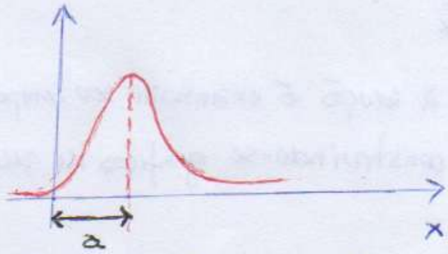
Freqüentemente, tem-se o caso em que as variáveis são uma coordenada espacial e outra temporal: $u(x,t)$. Nesse caso, a curva $u(x,t_1)$, com t_1 fixo, representa o comportamento da solução no instante t (é como uma fotografia da solução em $t=t_1$). A curva $u(x_1,t)$ representa a variação temporal da solução no ponto com coordenada x_1.

Exemplo: Visualização das soluções da E.D.P. $u_t + a u_x = 0$, com a constante. Essa é uma equação de onda de 1ª ordem. É fácil verificar que a solução geral dessa E.D.P. é $u(x,t) = \varphi(x - a.t)$, sendo φ uma função univariada derivável. Consideremos $a>0$ e façamos o gráfico de $u(x,t)$ para $t=0$, $t=1$, $t=2$ e $t=3$:

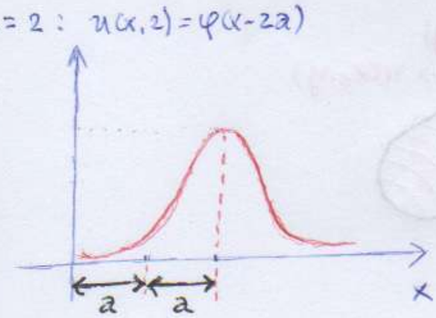
$t=0$: $u(x,0)=\varphi(x)$



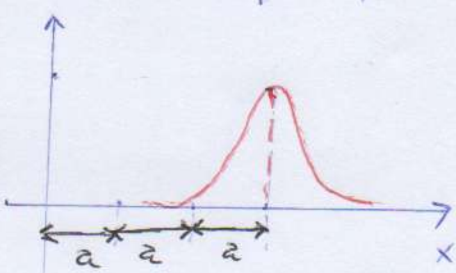
$t=1$: $u(x,1)=\varphi(x-a)$



$t=2$: $u(x,2)=\varphi(x-2a)$



$t=3$: $u(x,3)=\varphi(x-3a)$



Princípio da Superposição

É uma propriedade das E.D.P.'s lineares homogêneas de qualquer ordem. Dada a E.D.P. de 2ª ordem a coeficientes constantes, por exemplo:

$$A u_{xx} + B.u_{xy} + C u_{yy} + D.u_x + E u_y + F.u = 0, \quad (336)$$

com A, B, C, D, E e F constantes, se $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ são soluções da E.D.P. (336), então $u(x,y) = C_1.u_1(x,y) + C_2.u_2(x,y)$, sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias, também é solução de (336). De fato, como $u_x = C_1 u_{1x} + C_2 u_{2x}$, $u_{xx} = C_1.u_{1xx} + C_2.u_{2xx}$, $u_y = C_1.u_{1y} + C_2.u_{2y}$, $u_{yy} = C_1.u_{1yy} + C_2.u_{2yy}$, $u_{xy} = C_1.u_{1xy} + C_2.u_{2xy}$, então:

$$A(C_1 u_{1xx} + C_2 u_{2xx}) + B(C_1.u_{1xy} + C_2.u_{2xy}) + C(C_1.u_{1yy} + C_2.u_{2yy}) + D.(C_1.u_{1x} + C_2.u_{2x}) +$$
$$E(C_1.u_{1y} + C_2.u_{2y}) + F(C_1.u_1 + C_2.u_2) = C_1\underbrace{(A u_{1xx} + B.u_{1xy} + C.u_{1yy} + D.u_{1x} + E.u_{1y} + F.u_1)}_{=0} +$$
$$C_2\underbrace{(A.u_{2xx} + B.u_{2xy} + C.u_{2yy} + D.u_{2y} + E.u_{2x} + F.u_2)}_{=0} = 0$$

Pelo mesmo raciocínio, mostra-se que se $u_1(x,y), u_2(x,y), \dots, u_n(x,y)$ são soluções de (336), então $u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot u_k(x,y)$, sendo $c_1, c_2, \dots, c_k$ constantes, é solução de (336). Embora tenhamos assumido que as funções c_k são constantes, o princípio também se aplica a funções variáveis.

Uma E.D.P. linear pode ter infinitas soluções particulares enumeráveis. Por exemplo, a E.D.P. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ tem infinitas soluções particulares $u_k(x,t) = \sin(k \cdot w \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot w}{a} x\right)$, sendo w uma constante e $k = 1, 2, \dots$

Pelo princípio da superposição, a série $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot u_k(x,t)$ é solução, sendo c_k constantes.

Uma E.D.P. linear pode ter infinitas soluções não enumeráveis na forma $u(x,t,\lambda)$, sendo λ um parâmetro real. Por exemplo, a E.D.P. $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$ tem soluções $u(x,t,\lambda) = e^{-\lambda^2 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Pelo princípio da superposição, dada uma função $f(\lambda)$, a função $v(x,t) = \int f(\lambda) \cdot u(x,t,\lambda) d\lambda$ é solução da E.D.P.

E.D.P.'s lineares de interesse para as Geociências

Há três E.D.P.'s de larga aplicação em Ciências da Terra:

(i) Equação de onda;

(ii) Equação de difusão;

(iii) Equação de Poisson (Equação de Laplace);

Outras equações diferenciais parciais muito importante são as seguintes:

(iv) Equação de Helmholtz;

(v) Equação de Schrödinger (Descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo; Análogo quântico da 2ª lei de Newton);

(vi) Equação de Klein-Gordon.

As E.D.P.'s de maior aplicabilidade na área de geociências dadas por (i), (ii) e (iii) são lineares a coeficientes constantes:

- As equações (i) e (ii) envolvem coordenadas espaciais e temporais;
- A equação (iii) envolve somente variáveis espaciais;
- A equação (i) envolve transporte de energia;
- A equação (ii) envolve transporte de massa ou energia;
- A equação (iii) envolve a modelagem de campos (gravitacional, elétrico, magnético), etc.

As E.D.P.'s em questão da forma:

(i) Equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ sendo } u \equiv u(x,t) \quad (1D) \qquad (337)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,t) \quad (2D) \qquad (338)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,z,t) \quad (3D) \qquad (339)$$

A equação de onda também pode ser escrita como: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$, sendo:

$$\nabla^2 u = \begin{cases} u_{xx} & (1D) \\ u_{xx} + u_{yy} & (2D) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & (3D) \end{cases}$$

∇^2 é o operador Laplaciano.

(ii) Equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ sendo } u \equiv u(x,t) \quad (1D) \qquad (340)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,t) \quad (2D) \qquad (341)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,z,t) \quad (3D) \qquad (342)$$

A equação de difusão também pode ser escrita como: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u$, sendo:

$$\nabla^2 u = \begin{cases} u_{xx} & (1D) \\ u_{xx} + u_{yy} & (2D) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & (3D) \end{cases}$$

(iii) Equação de Poisson e de Laplace

• Poisson: $\nabla^2 u = f$

$u_{xx} = f(x)$ (1D) (343)

$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ (2D) (344)

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z)$ (3D) (345)

• Laplace: $\nabla^2 u = 0$

$u_{xx} = 0$ (1D) (346)

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ (2D) (347)

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ (3D) (348)

E.D.P.'s lineares de segunda ordem: Classificação

Um dos pontos mais importantes para o estudo das E.D.P.'s lineares de 2ª ordem é a classificação, dessas equações. Vamos considerar apenas duas variáveis independentes numa primeira análise, de modo que a E.D.P. mais geral é da forma:

$$A u_{xx} + B.u_{xy} + C.u_{yy} + D.u_x + E.u_y + F.u = G \qquad (349)$$

sendo $u = u(x,y)$ a solução da E.D.P e $A = A(x,y)$, $B = B(x,y)$, etc. funções constantes. Sabendo que a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (350)$$

representa uma hipérbole, parábola ou elipse de acordo com:

$$\Delta = B^2 - 4.A.C = \begin{cases} >0, & \text{hipérbole} \quad (351.a) \\ =0, & \text{parábola} \quad (351.b) \\ <0, & \text{elipse} \quad (351.c) \end{cases}$$

Podemos tomar emprestado essa nomenclatura e classificar a equação (349) em hiperbólica, parabólica e elíptica em um ponto (x,y), conforme:

$$\Delta = B^2 - 4.A.C. = \begin{cases} >0, & \text{E.D.P hiperbólica} \quad (352.a) \\ =0, & \text{E.D.P. parabólica} \quad (352.b) \\ <0, & \text{E.D.P. elíptica} \quad (332.c) \end{cases}$$

Observação importante: A classificação de E.D.P.'s dessa forma é independente do sistema de coordenadas.

As equações de nosso interesse neste curso são classificadas como:

- Equação de onda: E.D.P. hiperbólica
- Equação de difusão: E.D.P. parabólica
- Equação de Poisson e Laplace: E.D.P. elíptica

Neste módulo da disciplina estudaremos a equação de onda e a equação de Poisson (Laplace).

Equação de Onda

Onda é qualquer sinal que se transmita, de um ponto ao outro, com uma velocidade definida, sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro. Uma onda transporta somente energia e momento!

A equação de onda é muito importante em sismologia, por exemplo. Quando um terremoto ocorre, ele libera parte da energia acumulada devido às tensões tectônicas em forma de ondas sísmicas. Ondas sísmicas são, portanto, manifestações dos pulsos energéticos liberados pelos terremotos que fazem as partículas das rochas vibrarem em várias direções.

Infelizmente, devido à limitação de tempo, não farei a demonstração da derivação da equação de onda. Vocês podem encontrar demonstrações nas referências bibliográficas sugeridas no início deste curso.

Solução da Equação de onda (1D)

A equação de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ tem solução geral do tipo:

$$u(x,t) = \varphi(x-a.t) + \psi(x+at) \qquad (353)$$

sendo φ e ψ funções à variável duplamente derivável. De fato, quando substituímos a equação (353) na equação de onda, obtemos:

$$u_x = \varphi'(x-at) + \psi'(x+at)$$

$$u_{xx} = \varphi''(x-at) + \psi''(x+a.t)$$

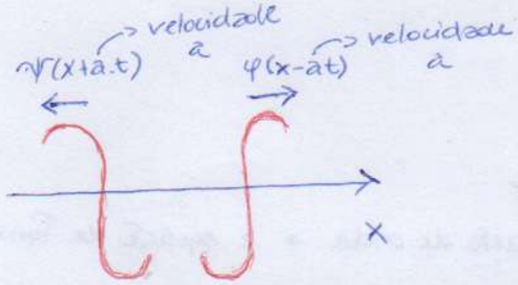
$$u_t = (-a).\varphi'(x-a.t) + a.\psi'(x+at)$$

$$u_{tt} = a^2.\varphi''(x-a.t) + a^2.\psi''(x+at)$$

$$u_{tt} = a^2 \underbrace{\left[\varphi''(x-a.t) + \psi''(x+a.t)\right]}_{u_{xx}} \therefore$$

$$\boxed{u_{tt} = a^2.u_{xx}}$$

Tem-se, dessa forma, que a solução geral da equação de onda é uma onda propagando-se com velocidade de a na direção de x crescente somada a uma onda $\psi(x+at)$ propagando-se com velocidade a na direção de x decrescente.



Equação de onda 1D - Solução em domínio infinito: Fórmula de D'Alembert

A equação de onda dada por:

$$u_{tt} = a^2.u_{xx} \qquad (354)$$

foi um dos problemas mais importantes do século XVIII. O primeiro a estudá-la foi D'Alembert, seguido de Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange. Foram obtidas soluções em diversas formas e a discussão sobre os méritos e as relações entre essas soluções levantou questões fundamentais, como, por exemplo, o que é uma função, que só foram resolvidas no século seguinte.

Vamos, aqui, determinar a solução da equação de onda dada pela equação (354) quando o domínio é infinito, ou seja $-\infty < x < +\infty$ e $t \geq 0$, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{(posição inicial)} \qquad (355)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{(velocidade inicial)} \qquad (356)$$

sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções fornecidas. Como dissemos, a equação de onda tem solução na forma da equação (353), sendo φ e ψ funções univariáveis arbitrárias, duplamente variáveis e $\underline{a}$ a velocidade de propagação da onda. Se $a > 0$, então $\varphi(x-a.t)$ e a onda está se propagando no sentido crescente de x. Se $a < 0$, $\psi(x+a.t)$ e temos a onda se propagando no sentido de x decrescente.

Assim, devemos determinar as funções φ e ψ de modo que a equação (353) satisfaça as condições iniciais. Impondo-se a condição (355), temos:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad (357)$$

Derivando-se a equação (353) em relação ao tempo, chegamos à:

$$u_t(x,t) = (-a).\varphi'(x-at) + (a)\psi'(x+at) \qquad (358)$$

Impondo-se a condição da equação (356), temos:

$$u_t(x,0) = (-a).\varphi'(x) + a\psi'(x) = g(x) \qquad (359)$$

Se nós integrarmos a equação (359) em relação a x, obtemos:

$$a\int_0^x -\varphi'(\lambda)d\lambda + a.\int_0^x \psi'(\lambda)d\lambda = \int_0^x g(\lambda)d\lambda \qquad (360)$$

$$-a\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] + a\left[\psi(x) - \psi(0)\right] = \int_0^x g(\lambda)d\lambda \qquad (361)$$

$$a\left[-\varphi(x) + \psi(x)\right] = \int_0^x g(\lambda)d\lambda + a\left[-\varphi(0) + \psi(0)\right] \qquad (362)$$

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \underbrace{\left[\psi(0) - \varphi(0)\right]}_{\text{constante} = C} \qquad (363)$$

Portanto, das equações (357) e (363) formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) & (364.a) \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x g(\lambda)d\lambda + C & (364.b) \end{cases}$$

Somando-se as equações (364a) e (364.b), chegamos à:

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x)}{2} + \frac{c}{2}} \quad (365)$$

Substituindo a equação (365) na equação (364.a), obtemos:

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1}{2a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x)}{2} - \frac{c}{2}} \quad (366)$$

Agora, devemos substituir φ e ψ na solução geral e teremos uma solução particular que atende as condições iniciais:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x-at)}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x+at)}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-a.t) + \frac{1}{2}f(x+a.t) + \frac{1}{2.a}\int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2a}\int_0^{x-a.t} g(\lambda)d\lambda} \quad (367)$$

↳ Fórmula de D'Alembert

A fórmula de D'Alembert nos permite escrever diretamente a solução da equação de onda que satisfaz as condições $\{u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)\}$. No caso em que as condições iniciais são $\{u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0$, (velocidade inicial nula)$\}$, a solução denomina-se onda de deslocamento:

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}f(x-a.t)}_{\substack{\text{onda direta} \\ \overrightarrow{a}}} + \underbrace{\frac{1}{2}f(x+a.t)}_{\substack{\text{onda reversa} \\ \overleftarrow{a}}} \quad (368)$$

No caso em que $\{u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = g(x)\}$, a solução denomina-se onda de impulso:

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2a}\int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda}_{\substack{\text{onda reversa} \\ \overleftarrow{a}}} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} g(\lambda)d\lambda}_{\substack{\text{onda direta} \\ \overrightarrow{a}}} \quad (369)$$

A equação (367) pode ser escrita de forma mais compacta, observando-se que:

$$\int_0^{x+a.t} g(\lambda).d\lambda - \int_0^{x-a.t} g(\lambda).d\lambda = \int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda + \int_{x-at}^{0} g(\lambda)d\lambda = \int_{x-at}^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda.$$ Portanto,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-at) + \frac{1}{2}(x+a.t) + \frac{1}{2a}\int_{x-a.t}^{x+at} g(\lambda)d\lambda} \quad (370)$$

Solução da equação de onda em domínio espacial finito: Método da Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis é um método geral para a solução de E.D.P.'s lineares. As soluções obtidas são na forma de séries fracionais.

No caso, quer-se obter a solução da equação de onda

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \qquad (371)$$

sujeita às condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \qquad (372)$$
$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (373)$$

e às condições de contorno/fronteira. Para o caso de uma corda vibrante, fixada em dois pontos e de comprimento L, temos:

$$u(0,t) = 0 \qquad (374)$$
$$u(L,t) = 0 \qquad (375)$$

com $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$.

Geralmente, o método de separação de variáveis é aplicado em duas etapas.

ⓐ Determinam-se soluções da equação de onda (371) que satisfaçam as condições de contorno;

ⓑ Utiliza-se o princípio de superposição para encontrar uma combinação linear das soluções obtidas em ⓐ, tal que as condições iniciais e de contorno sejam satisfeitas.

Separação de variáveis - Etapa ⓐ

Procura-se soluções da equação (371) que tenham a forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (376)$$

e que satisfaçam as condições de contorno. Para que a equação (376) satisfaça as condições de contorno, deve-se ter:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad (377)$$
$$u(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad (378)$$

Porém,

$$X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ \text{ou} \\ T(t) = 0 \end{cases} . \quad \text{No entanto, } T(t) \equiv 0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$$

Essa é a solução trivial. Para soluções não-triviais, deve-se ter $X(0) = 0$. Analogamente, para a equação (378), temos:

$$X(L).T(t)=0 \quad \forall\ t \Rightarrow \begin{cases} X(L)=0 \\ \text{ou} \\ T(t)=0 \end{cases}$$

Novamente, $T(t)=0$ nos conduz à solução trivial. Desse modo, procura-se soluções da equação de onda (371) na forma da equação (376) de tal forma que $X(x)$ satisfaça as condições de contorno:

$$\begin{cases} X(0)=0 & (379.a) \\ \text{e} \\ X(L)=0 & (379.b) \end{cases}$$

Agora, impomos que $u(x,t) = X(x).T(t)$ é solução de $u_{tt} = a^2 . u_{xx}$. Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}[X(x).T(t)] = X(x).T'(t) \qquad (380)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[X(x).T'(t)] = X(x).T''(t) \qquad (381)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[X(x).T(t)] = X'(x).T(t) \qquad (382)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[X'(x).T(t)] = X''(x).T(t) \qquad (383)$$

Substituindo as equações (381) e (383) na equação (371), obtemos:

$$X(x).T''(t) = a^2 . X''(x).T(t) \qquad (384)$$

Agrupando-se os termos em x no 2º membro e os termos em t no 1º membro, chegamos à:

$$\frac{1}{a^2} . \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (385)$$

Como o 1º membro é função apenas de t e o 2º membro é apenas função de x e sendo x e t independentes, a única maneira da equação (385) ser satisfeita para todos os valores de x e de t é:

$$\frac{1}{a^2} . \frac{T''(t)}{T(t)} = C \qquad (386)$$

e

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C \qquad (387)$$

sendo C uma constante. De fato, derivando-se a equação (385) em relação a x, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\overset{=0}{T''(t)}}{T(t)}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X''(x)}{X(x)}\right]=0 \therefore \frac{X''(x)}{X(x)}=C_1$$

Analogamente, derivando a equação (385) em relação a t, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overset{=0}{X''(x)}}{X(x)}\right]=0 \therefore \frac{T''(t)}{T(t)}=C_2$$

Para que a equação (385) seja satisfeita, devemos ter $C_1=C_2=C$. Desse modo, o método da separação de variáveis transformou a E.D.P linear de 2^a ordem nas E.D.O.'s lineares de 2^a ordem dadas pelas equações (386) e (387). Resolvendo, inicialmente, a equação (387), temos:

$$X''(x)=C.X(x) \Rightarrow X''-CX(x)=0 \qquad (388)$$

A E.D.O. linear homogênea de 2^a ordem dada equação (388) tem soluções de forma diversa, dependendo se $C>0$, $C<0$ e $C=0$. Vamos, agora, explorar cada um dos casos.

Caso (i): $C=0$;

Então $X''(x)=0 \Rightarrow X'(x)=a$ e $X(x)=a.x+b$

sendo a e b constantes. Como $X(x)$ deve satisfazer as condições de contorno, então:

$X(0)=0$ e $X(L)=0$ implica em:

$X(0) \Rightarrow a.(0)+b=0 \therefore b=0$

$X(L) \Rightarrow a.(L)+b=0 \therefore a.L=0$, já que $b=0$. Como $L\neq 0$, já que L é o comprimento da corda, então $a=0$. Como temos tanto $a=0$ como $b=0$, isso significa que $X(x)\equiv 0$. Neste caso, $u(x,t)=X(x).T(t)$ é solução trivial.

Caso (ii) $C>0$;

Por praticidade, vamos tomar $C=\lambda^2$, λ real não nulo. Assim, a equação (388) pode ser escrita como:

$$X''(x)-\lambda^2X(x)=0 \qquad (389)$$

que é uma E.D.O. homogênea de 2^a ordem. Dessa forma, teremos uma solução da forma:

$$X(x)=e^{px}$$

com o seguinte polinômio característico associado a equação (389):

$$p^2.e^{px}-\lambda^2.e^{px}=0 \Rightarrow e^{px}(p^2-\lambda^2)=0.$$ Como $e^{px}\neq 0$, então $p^2-\lambda^2=0$ e $p=\pm\lambda$. Assim, teremos duas soluções particulares. Usando o princípio da superposição, obtemos a solução geral dessa E.D.O.:

$$X(x)=\alpha.e^{\lambda x}+\beta.e^{-\lambda x} \qquad (390)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Como essa solução deve atender as condições iniciais, então:

$$X(0) = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$X(L) = \alpha . e^{\lambda L} + \beta . e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow -\beta . e^{\lambda . L} + \beta e^{-\lambda . L} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta . (e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}) = 0$$

Como λ é não nulo, $e^{-\lambda L} - e^{\lambda L} \neq 0$. Logo, $\beta = 0$. Assim, $\alpha = -\beta = 0$ e $X(x) \equiv 0$. Novamente, obtemos a solução trivial.

Caso (iii): $C < 0$;

Por praticidade, tomemos $C = -\lambda^2$, sendo λ um real não nulo. Assim, a equação (388) se torna:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (391)$$

A E.D.O. homogênea de 2ª ordem tem solução do tipo:

$$X(x) = e^{px}$$

Com o seguinte polinômio característico associado a equação (391):

$$p^2 + \lambda^2 = 0$$

cujas raízes são $p = \pm \lambda i$. Assim, teremos duas soluções linearmente independentes. Usando o princípio da superposição qualquer combinação linear dessas duas soluções linearmente independentes será solução da E.D.O., inclusive $\dfrac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} = \cos(\lambda x)$ e $\dfrac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i} = \sin(\lambda x)$. Portanto, a solução geral poderá ser escrita como:

$$X(x) = \alpha . \cos(\lambda x) + \beta . \sin(\lambda x) \qquad (392)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Impondo-se as condições iniciais a equação (392), temos:

$$X(0) = \alpha . \cos(\lambda . 0) + \beta . \sin(\lambda . 0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X(L) = \alpha . \cos(\lambda . L) + \beta . \sin(\lambda . L) = 0 \Rightarrow \beta . \sin(\lambda . L) = 0$$

Assim, ou $\beta = 0$ ou $\sin(\lambda L) = 0$. Para $\beta = 0$, teremos novamente a solução trivial. Para $\sin(\lambda L) = 0$, temos:

$$\sin(\lambda . L) = 0 \Rightarrow \lambda . L = K . \pi \text{, sendo } K \in \mathbb{Z} \text{, com } K \neq 0 \text{. Assim,}$$

$$\lambda = \frac{K\pi}{L} \qquad (393)$$

Dessa forma, obtemos:

$$X(x) = \beta . \sin\left(\frac{K\pi}{L} . x\right) \qquad (394)$$

sendo p = constante $\neq 0$. Essa é a solução que satisfaz as condições de contorno. Agora, temos de resolver a equação (386):

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = C$$

Como para a equação (387), essa E.D.O. só possui solução não trivial quando $C<0$. Tomando $C = -\lambda^2$, a equação (386) pode ser reescrita como:

$$T''(t) + a^2 \cdot \lambda^2 \cdot T(t) = 0 \quad (395)$$

Substituindo a equação (393) na equação (395), obtemos:

$$T''(t) + \frac{a^2 \cdot K^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot T(t) = 0 \quad (396)$$

A solução dessa E.D.O. é da forma:

$$T(t) = e^{pt} \quad (397)$$

com polinômio característico dado por:

$$p^2 + \left(\frac{aK\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad (398)$$

com raízes complexas dadas por:

$$p = \pm\left(\frac{a.K\pi}{L} i\right) \quad (399)$$

São, dessa forma, soluções particulares:

$$T_1(t) = e^{-\frac{aK\pi i}{L} \cdot t} \quad (400)$$

e

$$T_2(t) = e^{\frac{aK\pi i}{L} \cdot t} \quad (401)$$

Como na análise anterior, $\cos\left(\frac{aK\pi}{L} \cdot t\right)$ e $\sin\left(\frac{aK\pi}{L} t\right)$ também são soluções. Assim, pelo princípio da superposição, a solução geral para $T(t)$ é:

$$T(t) = A \cdot \cos\left(\frac{a.K\pi}{L} \cdot t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{a.K.\pi}{L} \cdot t\right) \quad (402)$$

Sendo A e B constantes.

Lembrando que $X(x) \cdot T(t)$ é solução da equação de onda procurada, temos:

$$u(x,t) = \beta \cdot \sin\left(\frac{K.\pi}{L} \cdot x\right) \cdot \left[A.\cos\left(\frac{K.a.\pi}{L} \cdot t\right) + B.\sin\left(\frac{K.a.\pi}{L} \cdot t\right)\right] \quad (403)$$

sendo β, A e B constantes e $K \neq 0$.

Multiplicando-se os termos em $u(x,t)$, obtemos:

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right)\left[\beta.A.\cos\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right) + \beta.B.\sin\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right)\right] \quad (404)$$

sendo $\beta.A$ e $\beta.B$ constantes. Assim,

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right).\left[D.\cos\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right) + E.\sin\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right)\right], \text{ para } K \neq 0 \quad (405)$$

O método de separação de variáveis permitiu determinar infinitas soluções da equação de onda que satisfazem as condições de contorno:

$$u_K(x,t) = \sin\left(\frac{K\pi}{L}.x\right).\left[p_K.\cos\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right) + q_K.\sin\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right)\right] \quad (406), \quad K \neq 0$$

As soluções da equação (406) são chamadas de modos naturais ou modos normais.

Etapa B:

Para completar a solução do problema, aplica-se o princípio da superposição às soluções particulares (infinitas soluções) (equação (406)). A solução geral para soluções enumeráveis, como vimos, é dada pela série:

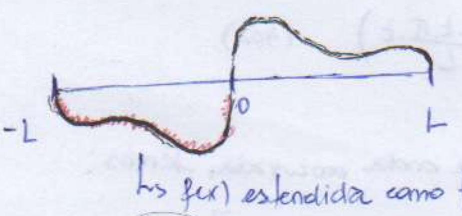
$$u(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{K.\pi.x}{L}\right).\left[p_K.\cos\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right) + q_K.\sin\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right)\right] \quad (407)$$

sendo que p_K e q_K, com $K \neq 0$ e $K \in \mathbb{Z}$, devam ser tais que as condições iniciais sejam satisfeitas: $\{u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)\}$. Impondo-se as condições iniciais à equação (407), temos:

$$u(x,0) = \sum_{K=1}^{+\infty} p_K.\sin\left(\frac{K.\pi x}{L}\right) = f(x), \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq L \quad \therefore$$

$$f(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} p_K.\sin(K.w.x), \quad \text{com} \quad w = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L} \quad (408)$$

Veja que a equação (408) representa o desenvolvimento de $f(x)$ em série de senos, com período igual a $2L$. A série de senos é o desenvolvimento de uma função ímpar. Isso significa que os coeficientes p_K, com $K = 1, 2, 3 \ldots$ são os coeficientes de Fourier de $f(x)$ estendida como função ímpar para $[-L, 0]$



↳ $f(x)$ estendida como função ímpar: $f(-x) = -f(x)$

Usando a equação (310), obtemos:

$$P_K = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} f(x).\sin\left(\frac{K\pi.x}{L}\right)dx \qquad (409)$$

Como $f(x)$ é uma função ímpar, então podemos reescrever a equação (409) como:

$$\boxed{P_K = \frac{4}{2L}\int_0^L f(x).\sin\left(\frac{K\pi}{L}.x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).\sin(K\omega x)dx} \qquad (410)$$

Agora, impondo-se a condição inicial $u_t(x,0) = g(x)$, chegamos à:

$$u_t(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty}\left[-P_K.\frac{Ka\pi}{L}.\sin\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right) + q_K.\frac{K.a.\pi}{L}.\cos\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right)\right].\sin\left(\frac{K\pi}{L}.x\right) \qquad (411)$$

Então:

$$u_t(x,0) = \sum_{K=1}^{+\infty} q_K.\frac{K.a.\pi}{L}.\sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right) = g(x) \quad \therefore$$

$$g(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} q_K.\frac{K.a.\pi}{L}.\sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right) \qquad (412)$$

Portanto, como a equação (412) é simplesmente o desenvolvimento de $g(x)$ em série de Fourier, então:

$$\frac{K.a\pi}{L}.q_K = \frac{2}{L}\int_0^L g(x).\sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right)dx \qquad (413)$$

ou

$$q_K = \frac{2}{Ka\pi}.\int_0^L g(x).\sin\left(\frac{K\pi}{L}.x\right)dx \qquad (414)$$

com $K = 1, 2, 3, \ldots$

Solução da Equação de onda 2D em coordenadas Cartesianas

A equação de onda 2D em coordenadas cartesianas é dada por:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad (415)$$

Considera-se que a solução não seja limitada espacialmente: $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$. Aplicando o método de separação de variáveis, temos:

$$u(x,y,t) = X(x).Y(y).T(t) \qquad (416)$$

Sendo $u(x,y,t)$ a solução da equação de onda 2D. Substituindo $u(x,y,t)$ na equação (415), obtemos:

$$u_{tt} = X(x).Y(y).T''(t) \qquad (417)$$

$$u_{xx} = X''(x).Y(y).T(t) \qquad (418)$$

$$u_{yy} = X(x) \cdot Y''(y) \cdot T(t) \qquad (419)$$

$$X(x) \cdot Y(y) \cdot T''(t) = a^2 \left[X''(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot T(t) \right] \qquad (420)$$

Dividindo-se cada membro da equação (420) por $X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$, chegamos à:

$$\frac{\cancel{X(x)} \cdot \cancel{Y(y)} \cdot T''(t)}{\cancel{X(x)} \cdot \cancel{Y(y)} \cdot T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x) \cdot \cancel{Y(y)} \cdot \cancel{T(t)}}{X(x) \cdot \cancel{Y(y)} \cdot \cancel{T(t)}} + \frac{\cancel{X(x)} \cdot Y''(y) \cdot \cancel{T(t)}}{\cancel{X(x)} \cdot Y(y) \cdot \cancel{T(t)}} \right] \qquad (421)$$

A equação (421) pode ser reescrita como:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}}_{1^{\underline{o}}\ \text{membro}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{2^{\underline{o}}\ \text{membro}} \qquad (422)$$

Como o primeiro membro da equação (422) não depende de x e y e o segundo membro não depende de t, então a equação (422) só pode ser satisfeita se:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{T''(t)}{T(t)} = C & (423.a) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C & (423.b) \end{cases}$$

sendo C uma constante. A equação (423.b), por outro lado, só pode ser satisfeita se:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C_1 & (424.a) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2 & (424.b) \end{cases}$$

sendo C_1 e C_2 constantes e $C_1 + C_2 = C$. Outro modo de constatar isso é derivando-se a equação (423.b) em relação à x e à y:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[C \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} \right] = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[C \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0$$

Assim, o método de separação de variáveis converte a E.D.P. $u_{tt} = a^2 \cdot \nabla^2 u$ em três diferentes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C_1 & (425.a) \\ \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2 & (425.b) \\ \dfrac{1}{a^2}.\dfrac{T''(t)}{T(t)} = C_1 + C_2 & (425.c) \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, resolver a equação (425.a) nos leva a três situações distintas: $C_1 = 0$, $C_1 > 0$ e $C_1 < 0$.

Para $C_1 = 0$, obtemos $X''(x) = 0 \Rightarrow X = ax + b$. Se $a \neq 0$, $X(x) = ax + b$ será uma função não-limitada e, portanto, não é fisicamente aceitável. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, $X(x) = b$, uma função constante, e também não é uma solução que nos interessa do ponto de vista físico.

Para $C_1 > 0$, com $C_1 = \lambda^2$, sendo λ um real não nulo, temos:

$$X''(x) = \lambda^2.X(x) \Rightarrow X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (426)$$

A solução desse tipo de E.D.O. é da forma

$$X(x) = e^{pt} \qquad (427)$$

com o seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 - \lambda^2 = 0 \qquad (428)$$

As raízes desse polinômio característico são: $p = \pm\lambda$. Usando o princípio da superposição, a solução será:

$$X(x) = \alpha.e^{-\lambda x} + \beta.e^{\lambda x} \qquad (429)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Veja, novamente, que obtemos uma solução que não possui significado físico, já que:

$$X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{diverge para } x \to -\infty \\ e^{\lambda x} & \text{diverge para } x \to +\infty \end{cases}$$

ou seja, teríamos uma solução não limitada no domínio do problema. Nos resta, então, o caso onde $C_1 < 0$.

Para $C_1 < 0$, com $C_1 = -\lambda^2$, sendo λ um real não nulo, temos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) \qquad (430)$$

com o seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \qquad (431)$$

As raízes do polinômio característico da equação (431) são: $p = \pm \lambda i$. Assim,

$$X(x) = A.e^{\lambda x i} + B.e^{-\lambda x i} \qquad (432)$$

sendo A e B constantes arbitrárias. A solução da equação (432) envolve funções periódicas. Com a experiência da análise na solução de X(x), sabemos que somente soluções de $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2$, com $C_2 < 0$, são de interesse físico. Assim, Y(y) terá solução do tipo:

$$Y(y) = D.e^{\theta y i} + E.e^{-\theta y i} \qquad (433)$$

sendo $C_2 = -\theta^2$. Dessa forma, a equação (425.c) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2 - \theta^2 \qquad (434)$$

ou

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \theta^2)T(t) = 0 \quad (435)$$

A solução da E.D.O. (435) é do tipo:

$$T(t) = e^{pi}$$

sendo p a raiz do seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 + a^2(\lambda^2 + \theta^2) = 0 \qquad (436)$$

com raízes dadas por $p = \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i$. Portanto, a solução geral de (435) é da forma:

$$T(t) = F.e^{a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i t} + G.e^{-a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i t} \qquad (437)$$

sendo F e G constantes arbitrárias. Resta-nos, agora, combinar X(x), Y(y) e T(t) e exprimí-las na forma real. Tomando w(x, y, t) como solução particular de u(x, y, t), temos:

$$w(x,y,t) = e^{\lambda x i} . e^{\theta y i} . e^{\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i t} = e^{[\lambda x + \theta y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, t]i} \qquad (438)$$

Verificando se, de fato, w(x, y, t) é solução da equação (415), temos:

$$w_{tt} = [a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}]^2 . e^{[\lambda x + \theta.y + a.\sqrt{\lambda^2+\theta^2}.t]i}$$

$$w_{xx} = \lambda^2 . e^{[\lambda x + \theta.y + a.\sqrt{\lambda^2+\theta^2}.t]i}$$

$$w_{yy} = \theta^2 . e^{[\lambda x + \theta.y + a.\sqrt{\lambda^2+\theta^2}.t]i}$$

$$[\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}]^2 . e^{\varphi i} = a^2(\lambda^2+\theta^2).e^{\varphi i} \Rightarrow \boxed{a^2(\lambda^2+\theta^2).e^{\varphi i} = a^2(\lambda^2+\theta^2).e^{\varphi i}}, \text{ sendo}$$

$\varphi = [\lambda x + \theta.y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}.t]$ $\therefore$ w(x, y, t) é solução da equação (415).

Do mesmo modo, pode-se verificar que $v(x,y,t) = e^{-\lambda x i} \cdot e^{-\theta y i} \cdot e^{\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i t}$ também é solução da equação de onda. Pelo princípio da superposição, combinações lineares de $w(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$ também são soluções:

$$\frac{w(x,y,t) + v(x,y,t)}{2} \qquad (439)$$

e

$$\frac{w(x,y,t) - v(x,y,t)}{2i} \qquad (440)$$

Da equação de Euler, podemos reescrever as equações (439) e (440) como:

$$\frac{w(x,y,t) + v(x,y,t)}{2} = \cos(\varphi) = \underbrace{\cos\left[\lambda x + \theta . y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t\right]}_{C(x,y,t)} \qquad (441)$$

e

$$\frac{w(x,y,t) - v(x,y,t)}{2i} = \sin(\varphi) = \underbrace{\sin\left[\lambda x + \theta . y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t\right]}_{S(x,y,t)} \qquad (442)$$

sendo $C(x,y,t)$ e $S(x,y,t)$ soluções reais da equação de onda 2D. Assim, a combinação das equações (441) e (442) nos leva à solução geral da equação (415).

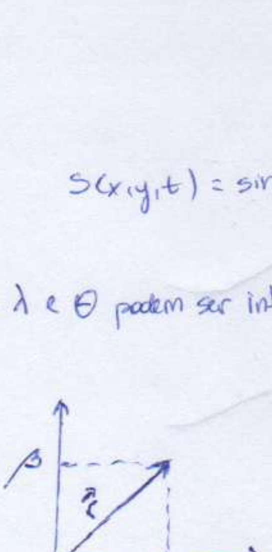
Para visualizar o comportamento dessas soluções, as mesmas podem ser reescritas como:

$$C(x,y,t) = \cos\left[\sqrt{\lambda^2+\theta^2} \cdot \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} + \frac{\theta . y}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \pm a t\right)\right] \qquad (443)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\sqrt{\lambda^2+\theta^2} \cdot \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} + \frac{\theta . y}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \pm a . t\right)\right] \qquad (444)$$

Note que λ e θ podem ser interpretados como componentes x e y de um vetor no plano xy:



$|\vec{r}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Dessa forma, $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$ e $\frac{\theta}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$ correspondem ao vetor de comprimento unitário $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = |\vec{n}|$, ou seja,

$$n_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \quad e \quad n_2 = \frac{\theta}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$$

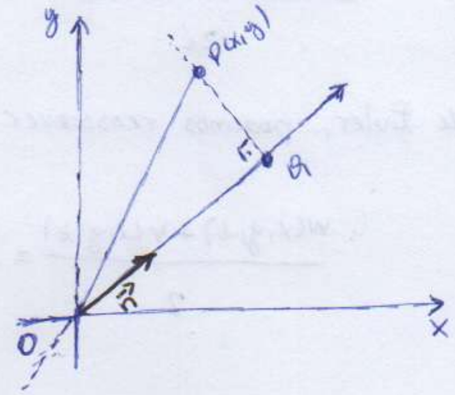
Chamando $\sqrt{\lambda^2+\theta^2} = \gamma$, temos:

$$C(x,y,t) = \cos\left[\gamma(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y \pm a t)\right] \qquad (445)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\gamma(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y \pm a.t)\right] \qquad (446)$$

Repare que o termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ pode ser visto como produto escalar do vetor unitário $\vec{n}$ com o vetor de componentes (x,y). O termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ é a projeção do segmento $\overline{OP}$ sobre a reta definida por $\vec{n}$. O termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ determina a posição do ponto Q sobre a reta definida por $\vec{n}$, sendo o ponto Q a projeção ortogonal de P sobre a reta. O segmento $\overline{OQ}$ pode ser considerado como a coordenada do ponto Q sobre o <u>eixo r</u>, definido pelo vetor $\vec{n}$. Dessa forma, $r = n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ é coordenada do ponto $P(x,y)$ no eixo r. Desse modo, as soluções da equação de onda podem ser escritas como:



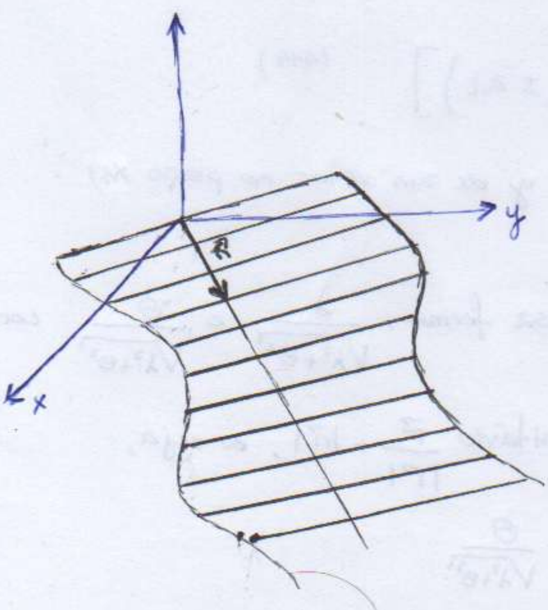
$$C(x,y,t) = \cos\left[\gamma(r \pm a.t)\right] \qquad (447)$$

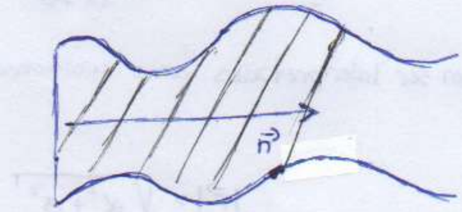
e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\gamma(r \pm a.t)\right] \qquad (448)$$

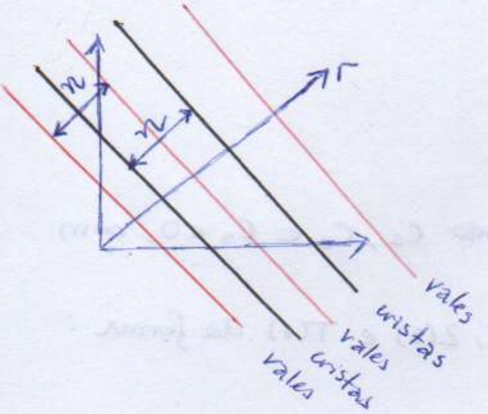
Assim, C e S são efetivamentes ondas 1D, dependentes da coordenada r, propagando-se no sentido de r crescente ou decrescente, dependendo do sinal $\pm a$.

Graficamente





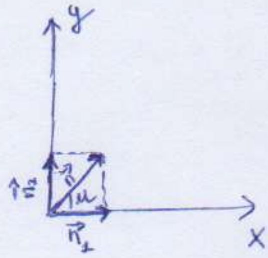
Dessa maneira, $C(x,y,t)$ e $S(x,y,t)$ tem suas cristas e vales na forma de retas perpendiculares ao eixo r.



Essa geometria da solução da equação de onda é denominada onda linear (as frentes são retas). A distância entre duas frentes com a mesma fase (por exemplo, duas cristas e dois vales consecutivos) define o comprimento de onda η, tal que:

$\gamma . \eta = 2\pi$, então: $\gamma = \dfrac{2\pi}{\eta}$. Considerando C ou S para (x,y) fixo e t variável, essas funções periódicas de t com período $\gamma . a T = 2\pi \Rightarrow \gamma = \dfrac{2\pi}{\eta}$ e $T = \dfrac{\eta}{a}$.

Considerando que $\vec{n}$ tenha ângulo μ em relação ao eixo x, então:



com $|\vec{n}_1| = |\vec{n}| . \cos(\mu) = \cos(\mu)$

$|\vec{n}_2| = |\vec{n}| . \sin(\mu) = \sin(\mu)$

sendo μ a direção de propagação de ondas. Desse modo, as soluções C e S podem ser escritas como:

$$C(x,y,t) = \cos\left[\frac{2\pi}{\eta} . (x . \cos(\mu) + y . \sin(\mu) \pm a t)\right] \qquad (449)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\frac{2\pi}{\eta} . (x . \cos(\mu) + y . \sin(\mu) \pm a t)\right] \qquad (450)$$

Solução da Equação de onda 3D em coordenadas Cartesianas

Seja $u \equiv u(x,y,z,t)$ solução da equação de onda 3D:

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \qquad (451)$$

Aplicando-se o método de separação de variáveis na equação (451), chegamos à:

$$u(x,y,z,t) = X(x) . Y(y) . Z(z)\ T(t) \qquad (452)$$

Após substituirmos a equação (452) na equação (451) e desmembrarmos o resultado de maneira apropriada, obtemos um conjunto de 4 equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C_1 , \qquad (453)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2 , \qquad (454)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = C_3, \qquad (455)$$

e

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (456)$$

Como visto nos casos 1D e 2D, as soluções de interesse ocorrem quando C_1, C_2 e $C_3 < 0$, com $C_1 = -\lambda^2$, $C_2 = -\alpha^2$ e $C_3 = -\beta^2$, com soluções para $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ e $T(t)$ da forma:

$$X(x) = e^{i\lambda x} \qquad (457)$$

$$Y(y) = e^{i\alpha y} \qquad (458)$$

$$Z(z) = e^{i\beta z} \qquad (459)$$

e

$$T(t) = e^{\pm a\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}\, i t} \qquad (460)$$

sendo λ, α e β constantes reais arbitrárias. Utilizando-se dos mesmos procedimentos do caso 2D, chega-se a soluções na forma de ondas planas:

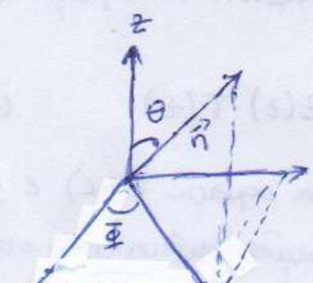
$$C(x,y,z,t) = \cos\left[\frac{2\pi}{\eta}\left(n_1\cdot x + n_2\cdot y + n_3\cdot z \pm a t\right)\right] \qquad (461)$$

e

$$S(x,y,z,t) = \sin\left[\frac{2\pi}{\eta}\left(n_1 x + n_2\cdot y + n_3\cdot z \pm a\cdot t\right)\right] \qquad (462)$$

Sendo n_1, n_2 e n_3 as componentes Cartesianas de um vetor unitário $\vec{n}$. As frentes de onda são planos perpendiculares a $\vec{n}$:

$$n_1 = \sin(\theta)\cdot\cos(\Phi)$$
$$n_2 = \sin(\theta)\cdot\sin(\Phi)$$
$$n_3 = \cos(\theta)$$

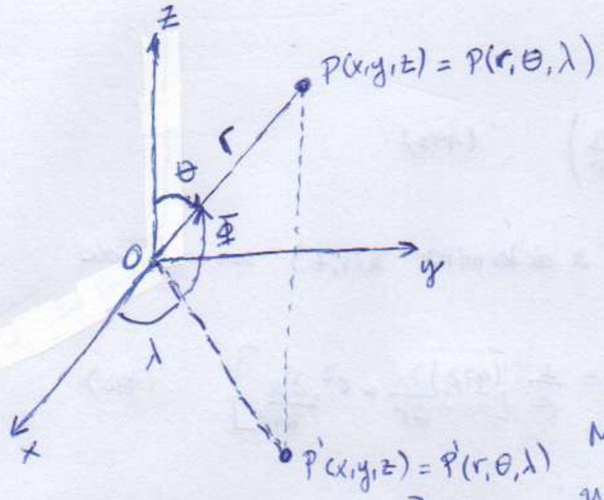


θ = colatitude

Φ = longitude

Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é apresentado na figura abaixo



$r = \overline{OP}$ - raio vetor

θ = colatitude : ângulo entre Oz e $\overline{OP}$

λ = longitude : ângulo Ox e OP'

No lugar da colatitude θ, pode-se usar a latitude Φ.

Φ = ângulo entre OP' e OP, sendo $\theta + \Phi = \frac{\pi}{2}$

As coordenadas esféricas compreendem três coordenadas: r, que dá a distância entre a origem O e o ponto P considerado; θ mede o ângulo entre a reta definida pelo eixo z e a definida pela origem e o ponto P; e λ, que mede o ângulo entre a projeção de reta definida pela origem e P, no plano xy, e o eixo x, $\overline{OP'}$. A transformação entre coordenadas cartesianas e esféricas é dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (463)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \qquad (464)$$

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (465)$$

e a relação inversa é dada por:

$$x = r \operatorname{sen}\theta . \cos(\lambda) \qquad (466)$$

$$y = r . \sin\theta . \sin(\lambda) \qquad (467)$$

$$z = r . \cos\theta \qquad (468)$$

Mostra-se, a partir da relação entre coordenadas cartesianas e esféricas que o Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por:

$$\nabla^2 u(r,\theta,\lambda) = \frac{1}{r^2} . \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 . \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 . \sin\theta} . \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta . \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} . \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \qquad (469)$$

Solução da equação de onda em coordenadas esféricas

O caso geral é determinar a solução de:

$$u_{tt} = a^2 \cdot \nabla^2 u(r,\theta,\lambda) \qquad (470)$$

sendo $u(r,\theta,\lambda,t)$ a solução. Neste caso, vamos procurar a solução radialmente simétrica $u(r,t)$.

Assim, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$, tal que:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (471)$$

Dessa forma, o problema resume-se a determinar $u(r,t)$ solução de

$$u_{tt} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left[2r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right] \qquad (472)$$

A equação (472) pode ser reescrita como:

$$u_{tt} = a^2 \left[u_{rr} + \frac{2}{r} \cdot u_r\right] \qquad (473)$$

Aplicando o método de separação de variáveis na equação (473), obtemos:

$$u(r,t) = R(r) \cdot T(t) \qquad (474)$$

Derivando-se a equação (474) em relação a r e a t, temos:

$$u_{tt} = R(r) \cdot T''(t), \qquad (475)$$

$$u_r = R'(r) \cdot T(t), \qquad (476)$$

e

$$u_{rr} = R''(r) \cdot T(t) \qquad (477)$$

Substituindo as equações (475), (476) e (477) na equação (473), obtemos:

$$R(r) \cdot T''(t) = a^2 \left[R''(r) \cdot T(t) + \frac{2}{r} \cdot R'(r) \cdot T(t)\right] \qquad (478)$$

Separando-se as variáveis na equação (478) ao fazer a divisão dela por $R(r) \cdot T''(t)$, temos:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} \qquad (479)$$

Dessa forma, o método de separação de variáveis converteu a E.D.P. (473) em duas diferentes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{T''(t)}{T(t)} = C & (480.a) \\ \dfrac{R''(r)}{R(r)} + \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{R'(r)}{R(r)} = C & (480.b) \end{cases}$$

A equação (480.b) pode ser reescrita como:

$$R''(r) + \frac{2}{r}.R'(r) - R(r).C = 0 \quad (481)$$

A equação (481) é uma E.D.O. linear, homogênea, porém a coeficientes variáveis. Fazendo a mudança de variável $w(r) = r.R(r)$, a equação (481) se torna a coeficientes constantes:

$$R = w.r^{-1}, \quad R' = -r^{-2}.w + w'.r^{-1}, \quad R'' = 2.r^{-3}w - r^{-2}.w' + w''.r^{-1} - r^{-2}.w'$$

$$\frac{w''}{r} - \cancel{\frac{2w'}{r^2}} + \frac{2w}{r^3} + \frac{2}{r}\left(\cancel{\frac{w'}{r}} - \frac{w}{r^2}\right) - C.\frac{w}{r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{w''}{r} - C.\frac{w}{r} = 0 \qquad \frac{1}{r}\left[w'' - C\,w\right] = 0.$$ Disso resulta que:

$$w'' - C.w = 0 \quad (482)$$

Tomando-se $C<0$ e $C = -\lambda^2$, com λ real diferente de zero, chegamos à:

$$w'' + \lambda^2 w = 0 \quad (483)$$

O polinômio característico associado a esta E.D.O. é dado por:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \quad (484)$$

com raízes dadas por $p = \pm\lambda i$. A solução da E.D.O. (483) é da forma:

$$w(r) = e^{p.r}$$

com solução geral dada por:

$$w(r) = A.e^{+\lambda i r} + B.e^{-\lambda i r} \quad (485)$$

Como $w(r) = r.R(r)$, então:

$$R(r) = \frac{w(r)}{r} = A.\frac{e^{\lambda i r}}{r} + B.\frac{e^{-\lambda i r}}{r} \quad (486)$$

Voltando à equação (480.a), para $C<0$ e $C = -\lambda^2$, ou seja, para soluções fisicamente realizáveis, chegamos à:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \qquad (487)$$

com solução da forma:

$$T(t) = e^{\pm i a \lambda t} \qquad (488)$$

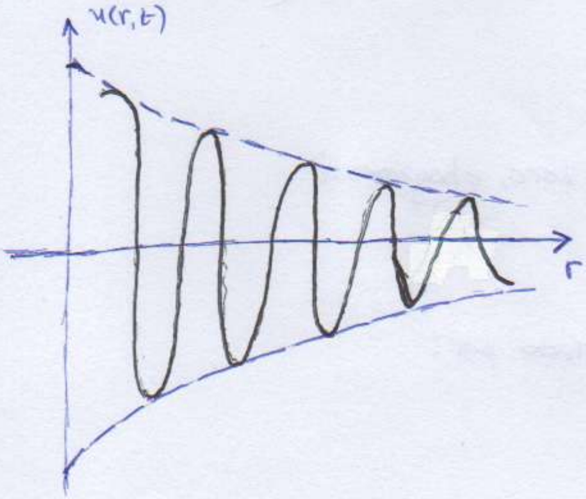
Substituindo $R(r)$ e $T(t)$ em $u(r,t)$, obtemos:

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \cdot e^{i\lambda(r \pm at)} \qquad (489)$$

Da forma complexa, resultam as seguintes soluções na forma real:

$$u(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\cos[\lambda(r \pm a.t)]}{r} \\ \dfrac{\sin[\lambda(r \pm a.t)]}{r} \end{cases}$$

Frentes de onda são superfícies esféricas



A diminuição da amplitude de $u(r,t)$ com o aumento de r se deve à distribuição da energia da onda sobre superfícies esféricas com raio cada vez maiores.

A energia distribui-se em superfícies esféricas com áreas cada vez maior, o que se reflete na diminuição da amplitude.

Equação de Laplace

Um contexto no qual surge a equação de Laplace é na solução estacionária da equação de difusão: $u_t = \nabla^2 u \Rightarrow$ solução estacionária: $u_t = 0 \therefore \nabla^2 u = 0$. No entanto, a aplicação mais relevante da equação de Laplace é na Teoria do Potencial. Da teoria do Potencial, tem-se que campos de forças, ditos conservativos, admitem uma função escalar, chamada potencial, a qual é harmônica e tem a propriedade de que o campo é igual ao gradiente do potencial. A equação de Laplace é dada por:

$$\nabla^2 u = 0 \qquad (490)$$

Funções que satisfazem a equação de Laplace são também chamadas de funções harmônicas.

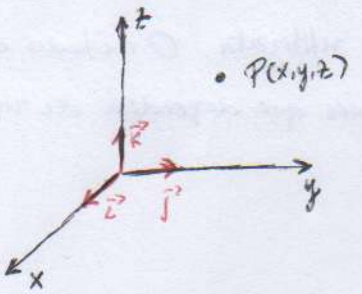
Em Geofísica, lidamos com os seguintes campos conservativos:

(a) Campo elétrico;

(b) Campo gravitacional (o campo de gravidade não é conservativo);

(c) Campo magnético em regiões sem correntes elétricas.

Como exemplo, consideremos o campo gravitacional:



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários na direção dos eixos coordenados.

O campo gravitacional é uma função vetorial $\vec{g}(x,y,z)$ que atribui o vetor aceleração gravitacional a cada ponto do espaço. Podemos escrever $\vec{g}$ em termos dos vetores unitários $\vec{g}(x,y,z) = g_1(x,y,z)\vec{i} + g_2(x,y,z)\vec{j} + g_3(x,y,z)\vec{k}$.

O campo gravitacional é descrito, portanto, por 3 funções escalares: $g_1(x,y,z)$, $g_2(x,y,z)$ e $g_3(x,y,z)$.

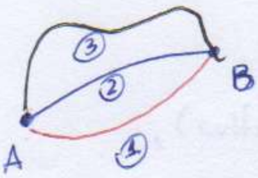
Na teoria do potencial, mostra-se que quando o campo é conservativo, então existe uma função escalar, $V(x,y,z)$, chamada potencial, a qual é harmônica ($\nabla^2 V = 0$) e é tal que $\vec{g}(x,y,z) = -\text{grad}(V(x,y,z))$:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ g_2(x,y,z) = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ g_3(x,y,z) = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Campo Conservativo

O campo gravitacional significa que uma massa pontiforme $\underline{m}$ colocada no ponto (x,y,z) experimenta uma força $\vec{F} = m.\vec{g}$. Movimentando a massa de um ponto A para um ponto B a força realiza um trabalho.

O campo é dito conservativo quando o trabalho realizado depende apenas dos pontos inicial e final (A, B) e não depende da trajetória



Solução da Equação de Laplace

A equação de Laplace pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, o qual nos leva à diversas formas de solução, dependendo do tipo de coordenadas utilizada. O método da separação de variáveis exprime a solução na forma de produto de funções que dependem de uma só variável:

$u(x,y,z) = X(x).\,Y(y).\,Z(z)$ cartesianas

$u(r,\theta,z) = R(r).\,\Theta(\theta).\,Z(z)$ cilíndricas

$u(r,\theta,\lambda) = R(r).\,\Theta(\theta).\,\lambda(\lambda)$ esféricas

No entanto, existem soluções da Equação de Laplace que não são de variáveis separadas. No caso, essas soluções são na forma de polinômios homogêneos. Considerando coordenadas cartesianas 2D, por exemplo, existem soluções $u(x,y)$ tais que $u(x,y)$ é um polinômio em x e y.

Polinômios homogêneos: São polinômios no qual os termos com coeficientes não nulos tem o mesmo grau total do polinômio.

mesmo grau

grau 1: $u(x,y) = ax + b.y$

grau 2: $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

mesmo grau

grau 3: $u(x,y) = ax^3 + bx^2.y + cx.y^2 + dy^2$

$\vdots$

grau n: $u(x,y) = a_1.x^n.y^0 + a_2.x^{n-1}.y + a_3.x^{n-2}.y^2 + \dots + a_{n+1}.x^0.y^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{(n-k)}.y^k$

Para encontrar polinômios homogêneos harmônicos, basta substituir o polinômio na equação de Laplace e determinar os coeficientes. Tomando-se, por exemplo, um polinômio de grau 3, temos:

$u_{xx} = 6ax + 2by$ e $u_{yy} = 2cx + 6dy \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow$

$6ax + 2by + 2cx + 6dy = 0 \Rightarrow 3ax + by + cx + 3dy = 0 \Rightarrow (3a+c)x + (b+3d)y = 0 \therefore$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \Rightarrow c = -3a \\ b + 3d = 0 \Rightarrow b = -3d \end{cases}$$

Como estamos supondo que o polinômio homogêneo de grau 3 é solução, então:

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \Rightarrow u(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 \Rightarrow$$

$$u(x,y) = a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y), \text{ com } a \text{ e } d \text{ constantes.}$$

Essa equação é solução da equação de Laplace na forma de um polinômio homogêneo de grau 3. Disso, resulta que existem duas soluções linearmente independentes: $u_1(x,y) = x.(x^2 - y^2)$ e $u_2(x,y) = y.(y^2 - x^2)$ e a solução geral é a combinação linear dessas duas soluções (princípio da superposição): $u(x,y) = a.u_1 + d.u_2$. No caso de coordenadas cartesianas 3D, igualmente existem funções harmônicas na forma de polinômios homogêneos.

Polinômio homogêneo 3D: Um polinômio homogêneo 3D de grau $\underline{n}$ tem termos na forma:

$$x^i . y^j . z^k$$

com $i + j + k = n$. Assim, para polinômios de grau 3, temos:

$$x^3 . y^0 . z^0 = x^3$$

$$x^2 . y^1 . z^0 = x^2 y$$

$$x^1 . y^2 . z^0 = xy^2$$

$$x^0 . y^3 . z^0 = y^3$$

$$x^2 . y^0 . z^1 = x^2 . z$$

$$x^1 . y^1 . z^1 = xyz$$

$$x^0 . y^2 . z^1 = y^2 . z$$

$$x^1 . y^0 . z^2 = x . z^2$$

$$x^0 . y^1 . z^2 = y . z^2$$

$$x^0 . y^0 . z^3 = z^3$$

Portanto,

$$u(x,y,z) = a_1 x^3 + a_2 x^2 . y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 z + a_6 xyz + a_7 y^2 . z + a_8 x . z^2 + a_9 . y z^2 + a_{10} . z^3$$

Existem soluções na forma de um polinômio homogêneo e de qualquer grau do polinômio. Qualquer polinômio de grau 0 ou 1 é solução da equação de Laplace. Para graus maiores do que 1, nem todo polinômio é solução.

Equação de Laplace em coordenadas Cartesianas - Separação de Variáveis

Outra forma de solução da equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas cartesianas é obtida pelo método de separação de variáveis.

Coordenadas Cartesianas 2D

Como feito para o caso da equação de onda, procuramos por soluções do tipo:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \qquad (491)$$

Se derivarmos a equação (491) duas vezes em relação a x e a y, chegamos à:

$$u_{xx} = X''(x) \cdot Y(y) \qquad (492)$$

e

$$u_{yy} = X(x) \cdot Y''(y) \qquad (493)$$

Substituindo as equações (492) e (493) na equação (490), obtemos:

$$u_{xx} + u_{yy} = X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \qquad (494)$$

Separando as variáveis na equação (494), temos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad (495)$$

Como o 1º membro da equação (495) depende apenas da variável x e o 2º membro depende de y, sendo x e y variáveis independentes, então a única maneira de satisfazer a equação (495) para todo x e y é:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C \qquad (496)$$

e

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \qquad (497)$$

sendo C uma constante. Para diferentes valores de C, temos:

$$C = 0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de uma reta} \\ (497) \text{ solução na forma de uma reta} \end{cases}$$

$$C > 0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de exponenciais} \\ (497) \text{ solução na forma de seno e cosseno} \end{cases}$$

$$C < 0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de seno e cosseno} \\ (497) \text{ soluções na forma de exponenciais} \end{cases}$$

Vamos explorar a situação $C<0$. Tomando-se $C=-\lambda^2$, sendo λ um real diferente de zero, da equação (496), temos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (498)$$

Sabemos que a solução da E.D.O. (498) é da forma:

$$X(x) = e^{px} \qquad (499)$$

sendo p a raiz do polinômio característico:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \qquad (500)$$

com raízes dadas por $p = \pm \lambda i$. Cada valor de λ fornece duas soluções linearmente independentes para a equação (498):

$$X(x) = A.e^{i\lambda x} + B.e^{-i\lambda x} \qquad (501)$$

Resolvendo-se, agora, a equação (497), temos:

$$Y''(y) - \lambda^2 . Y(y) = 0 \qquad (502)$$

a qual possui solução da forma:

$$Y(y) = C.e^{\lambda y} + D.e^{-\lambda y} \qquad (503)$$

Combinando-se a equações (501) e (503), temos:

$$u(x,y) = \left(A.e^{i\lambda x} + B.e^{-i\lambda x}\right).\left(C.e^{\lambda y} + D.e^{-\lambda y}\right) \qquad (504)$$

com A, B, C e D constantes arbitrárias.

Manipulando-se os coeficientes A e B, obtém-se a solução da equação (504) na forma real como:

$$u(x,y) = \left(\alpha.\cos(\lambda x) + \beta.\sin(\lambda x)\right).\left(C.e^{-\lambda y} + D.e^{\lambda y}\right) \quad (505)$$

A determinação das constantes arbitrárias vai depender das condições de contorno do problema.

Explorando soluções da equação (505), temos:

Situações para divergência da solução:

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x).e^{|\lambda| y} & (506.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x).e^{|\lambda| y} & (506.b) \end{cases} \Rightarrow y \to \infty, \text{ então } u \to \infty$$

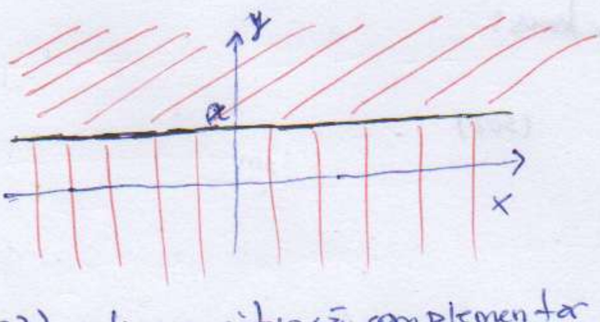
$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x).e^{-|\lambda| y} & (507.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x).e^{-|\lambda| y} & (507.b) \end{cases} \Rightarrow y \to -\infty \text{ então } u \to \infty$$

Situações para convergência da solução:

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x).e^{|\lambda| y} & (508.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x).e^{|\lambda| y} & (508.b) \end{cases} \Rightarrow y \to -\infty, \text{ então } u \to 0$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x).e^{-|\lambda| y} & (509.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x).e^{-|\lambda| y} & (509.b) \end{cases} \Rightarrow y \to -\infty, \text{ então } u \to 0$$

No caso em que $u(x,y)$ é o potencial associado à um campo de força (elétrico, gravitacional), mostra-se na teoria do potencial que $u(x,y) \to 0$ quando o ponto (x,y) afasta-se das fontes do campo (cargas elétricas ou massa). Desse modo, a forma (506) corresponde à situação em que as fontes do campo localizam-se em um semiplano $y > \alpha$ e $u(x,y)$ é válida na região $y \leq \alpha$



Região das fontes do potencial $y > \alpha$

Região de validade de $u(x,y)$ $y \leq \alpha$

A forma dada por (507) define a situação complementar:

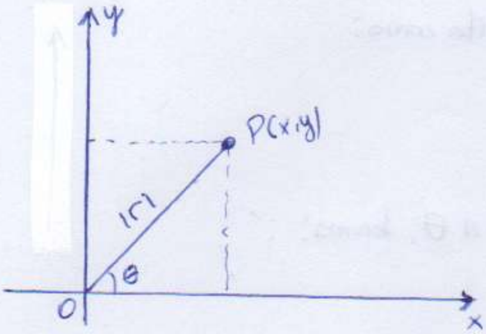
Região de validade de $u(x,y)$ $y \geq \alpha$

Região das fontes do potencial $y < \alpha$

Solução da Equação de Laplace em coordenadas Polares

Coordenadas Polares

Em coordenadas polares a localização espacial é feita pelo raio (distância da origem do eixo a um ponto P e θ, o ângulo entre $\overline{OP}$ e o eixo x. θ é crescente no sentido anti-horário



A relação entre coordenadas polares e cartesianas é a seguinte

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$$

A relação inversa é dada por:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Solução da Equação de Laplace

A equação de Laplace em coordenadas polares é dada por:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (510)$$

com $u(r,\theta)$.

Forma particular: Soluções radialmente simétricas, ou seja, $u(r,\theta) = u(r)$. Como u não dependerá de θ, então a equação (510) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \qquad (511)$$

Dessa forma, o termo $r.\frac{\partial u}{\partial r}$ pode ser visto como uma constante, já que a derivada dele em relação a r é zero. Portanto,

$$r.\frac{\partial u}{\partial r} = a \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a}{r} \qquad (512) \qquad \text{(a uma constante)}$$

Integrando-se a equação (512), temos:

$$u(r) = \int \frac{a}{r}\,dr = a.\ln|r| + b. \qquad (513)$$

Como $r \geq 0$, então $|r| = r$. Logo, a equação (513) pode ser reescrita como:

$$u(r) = a.\ln(r) + b \qquad (514)$$

com a e b constantes arbitrárias. Essa é também a solução radialmente simétrica em coordenadas cilíndricas (3D). Corresponde ao problema potencial logarítmico, produzido, por exemplo, por um fio com carga elétrica retilínea e de extensão infinita.

Solução na forma geral: A solução $u(r,\theta)$ é obtida, neste caso, pelo método de separação de variáveis:

$$u(r,\theta) = R(r).\,\Theta(\theta) \qquad (515)$$

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas pode ser escrita como:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2}.\,u_{\theta\theta} = 0 \qquad (516)$$

Calculando-se as derivadas parciais de $u(r,\theta)$ em relação a r e a θ, temos:

$$u_r = R'(r).\,\Theta(\theta) \qquad (517)$$

$$u_{\theta\theta} = R(r).\,\Theta''(\theta) \qquad (518)$$

$$u_{rr} = R''(r).\,\Theta(\theta) \qquad (519)$$

Substituindo na equação de Laplace, chegamos à:

$$R''(r)\,\Theta(\theta) + \frac{R'\Theta}{r} + \frac{R.\Theta''}{r^2} = 0 \qquad (520)$$

Dividindo-se a equação (520) por $R(r).\,\Theta(\theta) \neq 0$, obtemos:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}.\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}.\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \qquad (521)$$

Rearranjando os termos da equação (521), temos:

$$\underbrace{r^2.\frac{R''(r)}{R(r)} + r.\frac{R'(r)}{R(r)}}_{=C} = \underbrace{-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}}_{=C} \qquad (522)$$

Dessa forma, o método de separação de variáveis converteu a E.D.P. (510) em duas diferentes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} r^2.\dfrac{R''(r)}{R(r)} + r.\dfrac{R'(r)}{R(r)} = C & (523.a) \\[2ex] -\dfrac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = C & (523.b) \end{cases}$$

Para $C > 0$, com $C = \lambda^2$, λ um real diferente de zero, a equação (523.b) pode ser reescrita como:

$$-\Theta''(\theta) + \lambda^2\,\Theta(\theta) = 0 \qquad (524)$$

A E.D.O. (524) tem soluções do tipo:

$$\Theta(\theta) = e^{p\theta} \qquad (525)$$

sendo p raiz do seguinte polinômio característico associado a equação (525):

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \qquad (526)$$

com raízes dadas por: $p = \pm\lambda i$. Assim, a solução geral da equação (524) será dada por:

$$\Theta(\theta) = A.e^{\lambda\theta i} + B.e^{-\lambda\theta i} \qquad (527)$$

sendo A e B constantes arbitrárias. As soluções reais da equação (524) são da forma

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \sin(\lambda\theta) \\ \cos(\lambda\theta) \end{cases} \qquad (528)$$

Além de periódica, a solução $\Theta(\theta)$ deve ser contínua, ou seja, $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$. Para tanto, deve-se ter λ inteiro, ou seja: $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$. Assim, a equação (528) pode ser reescrita como:

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \cos(nA) \\ \sin(nA) \end{cases} \qquad (529)$$

Vamos, agora, resolver a equação (523.a), com $C = \lambda^2 = n^2$, tal que:

$$r^2.\frac{R''(r)}{R(r)} + r.\frac{R'(r)}{R(r)} = n^2 \Rightarrow r^2.R''(r) + r.R'(r) - n^2.R(r) = 0 \qquad (530)$$

A equação (530) é uma E.D.O. de 2ª ordem, homogênea, do tipo Euler-Cauchy. Como vimos na parte de E.D.O. deste curso, para se resolver este tipo de E.D.O., procura-se soluções do tipo:

$$R(r) = r^p \qquad (531)$$

Derivando-se R duas vezes em relação a r, temos:

$$R'(r) = p.r^{p-1} \qquad (532)$$

e

$$R''(r) = p.(p-1).r^{(p-2)} \qquad (533)$$

Substituindo (531), (532) e (533) na equação (530), obtemos:

$$r^2.p(p-1).r^{(p-2)} + r.p.r^{p-1} - n^2 r^p = 0 \Rightarrow p(p-1).r^p + p.r^p - n^2.r^p = 0$$

Encontramos, dessa forma, a seguinte equação auxiliar:

$$p(p-1) + p - n^2 = 0 \qquad (534)$$

A equação (534) pode ser reescrita como:

$$p^2 - p + p - n^2 = 0 \Rightarrow p^2 - n^2 = 0 \Rightarrow p = \pm n.$$

Dessa forma, R(r) é dada por:

$$R(r) = \begin{cases} r^n \\ \text{ou} \\ r^{-n} \end{cases}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, são soluções da equação (510):

$$u(r,\theta) = \begin{cases} r^n \cdot \cos(n\theta) & (535.a) \\ r^n \cdot \sin(n\theta) & (535.b) \\ r^{-n} \cdot \cos(n\theta) & (535.c) \\ r^{-n} \cdot \sin(n\theta) & (535.d) \end{cases}$$

Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A forma geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas é dada por:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2} = 0, \quad \text{com } u(r,\theta,\lambda) \qquad (536)$$

sendo r = raio vetor, θ = colatitude e λ = longitude.

Forma particular: A solução radialmente simétrica, ou seja, $u(r,\theta,\lambda) = u(r)$. Dessa forma, a equação (536) se reduz à:

$$\underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)}_{=0} = 0 \qquad (537)$$

Como $\frac{1}{r^2} \neq 0$, então

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \qquad (538)$$

e isso significa que o termo $r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}$ é uma constante a qual denominaremos de a. Dessa, a equação (538) pode ser reescrita como:

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = a \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \qquad (539)$$

Integrando-se a equação (539) em relação a r, obtemos:

$$u(r) = \int \frac{a}{r^2}\cdot dr = -\frac{a}{r} + b \qquad (540)$$

sendo a e b constantes.

Solução na forma geral: Na forma geral, a solução geral, $u(r,\theta,\lambda)$, é obtida pelo método de separação de variáveis e pode ser escrita como:

$$u(r,\theta,\lambda) = R(r).\Theta(\theta).\Lambda(\lambda) \qquad (541)$$

A equação (536) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.u_r\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.u_\theta\right) + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}.u_{\lambda\lambda} = 0 \qquad (542)$$

Calculando-se as derivadas parciais de $u(r,\theta,\lambda)$ em relação a r, θ e λ, temos:

$$u_r(r,\theta,\lambda) = R'(r).\Theta(\theta).\Lambda(\lambda), \qquad (543)$$

$$u_\theta(r,\theta,\lambda) = R(r).\Theta'(\theta).\Lambda(\lambda) \qquad (544)$$

e

$$u_{\lambda\lambda}(r,\theta,\lambda) = R(r).\Theta(\theta).\Lambda''(\lambda) \qquad (545)$$

Substituindo-se as equações (543), (544) e (545), obtemos:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.R'(r).\Theta(\theta).\Lambda(\lambda)\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.R(r).\Theta'(\theta).\Lambda(\lambda)\right) + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}.R(r).\Theta(\theta).\Lambda''(\lambda) \qquad (546)$$

Multiplicando-se a equação (546) por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta).\Lambda(\lambda)}$, com $R(r).\Theta(\theta).\Lambda(\lambda) \neq 0$, chegamos à:

$$\underbrace{\frac{1}{R(r)}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)}_{\mathrm{I}\;=\;\varphi} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\cdot\left(\sin\theta.\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Lambda(\lambda)\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2}}_{\mathrm{II}\;=\;-\varphi} = 0 \qquad (547)$$

Convém separarmos à equação (547) e escolher φ na forma $\varphi = n(n+1)$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ devido à forma da solução da função $\Theta(\theta)$, tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R(r)}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\dfrac{\partial R(r)}{\partial r}\right) = \varphi = n(n+1) & (548.a) \\[2ex] \dfrac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\left(\sin\theta.\dfrac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\Lambda(\lambda)\sin^2\theta}\cdot\dfrac{\partial^2\Lambda(\lambda)}{\partial\lambda^2} = -\varphi = -n(n+1) & (548.b) \end{cases}$$

Vamos começar resolvendo a questão (548.a), a qual pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{R(r)}\left[2r.\frac{\partial R(r)}{\partial r} + r^2.\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}\right] = n(n+1) \qquad (549)$$

ou

$$r^2.R''(r) + 2r\,R'(r) - n(n+1).R(r) = 0 \qquad (550)$$

Novamente, nos deparamos com uma E.D.O. do tipo Euler-Cauchy. A solução dessa E.D.O. é do tipo:

$$R(r) = r^{p} \qquad (551)$$

Derivando-se a equação (551), chegamos à:

$$R'(r) = p \cdot r^{p-1} \qquad (552)$$

e

$$R''(r) = p \cdot (p-1) \cdot r^{p-2} \qquad (553)$$

Substituindo as equações (551), (552) e (553) na equação (550), obtemos:

$$p(p-1) \cdot r^{p-2}\, r^{2} + 2p\, r^{p-1} \cdot r - n(n+1) \cdot r^{p} \qquad (554)$$

A equação (554) pode ser reescrita como:

$$p^2 - p + 2p - n(n+1) = 0 \Rightarrow p^2 + p - n(n+1) = 0 \qquad (555)$$

As raízes dessa equação auxiliar são dadas por:

$$p = \begin{cases} n \\ -(n+1) \end{cases} \qquad (556)$$

Portanto, são soluções da equação (550):

$$R(r) = \begin{cases} r^{n} & (557.a) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{1}{r^{n+1}} & (557.b) \end{cases}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Vamos, agora, analisar a equação (548.b). Multiplicando a equação (548.b) por $\sin^2\theta$, obtemos:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Lambda(\lambda)} \cdot \frac{\partial^2\Lambda(\lambda)}{\partial\lambda^2} + \sin^2\theta \cdot n(n+1) = 0 \qquad (558)$$

A equação (558) pode ser reescrita como:

$$m^2 = \underbrace{\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \sin^2\theta \cdot n(n+1)} + \underbrace{\frac{1}{\Lambda(\lambda)} \cdot \frac{\partial^2\Lambda(\lambda)}{\partial\lambda^2}}_{= -m^2} = 0 \qquad (559)$$

Podemos escrever a equação (559) em duas equações separadas, tal que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Lambda(\lambda)} \frac{\partial^2 \Lambda(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -m^2 & (560.a) \\ \frac{\sin\theta}{\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta . \frac{\partial \Theta}{\partial\theta}\right) + n(n+1) . \sin^2\theta = m^2 & (560.b) \end{cases}$$

A equação (560.a) é uma E.D.O. da forma:

$$\Lambda''(\lambda) + m^2 . \Lambda(\lambda) = 0 \qquad (561)$$

com solução real do tipo:

$$\Lambda = \begin{cases} \sin(m.\lambda) & (562.a) \\ \cos(m.\lambda) & (562.b) \end{cases}, \text{ com } m = 0, 1, 2, \ldots$$

A equação (560.b) é uma E.D.O. de 2ª ordem linear a coeficientes variáveis. Podemos resolvê-la fazendo a seguinte mudança de variável: $x = \cos\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Dessa forma, $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$. Usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d}{dx} = -\sin\theta . \frac{d}{dx} \qquad (563)$$

Substituindo a equação (563) na equação (560.b), temos:

$$-\frac{\sin^2\theta}{\Theta(\theta)} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta . \frac{d\Theta}{dx}\right) + n(n+1) . \sin^2\theta = m^2 \qquad (564)$$

Como $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$, a equação (564) pode ser reescrita como:

$$-(1-x^2) \cdot \frac{d}{dx}\left[-(1-x^2) . \frac{d\Theta}{dx}\right] + \left[n(n+1)(1-x^2) - m^2\right]\Theta = 0 \qquad (565)$$

Dividindo-se a equação (565) por $(1-x^2) \neq 0$, temos:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]\Theta = 0 \qquad (566)$$

A equação (10) é a E.D.O. de 2ª ordem conhecida como a equação generalizada de Legendre. Quando $m=0$, as soluções da equação de Legendre são polinômios em x, chamados polinômios de Legendre, com grau igual a n. Uma expressão fechada para os polinômios de Legendre é a fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (567)$$

Quando $x=1$, $P_n(1) = 1$. Quando $x=-1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. Assim, se n for par, $P_n(x)$ é uma

$P_n(x)$ é ímpar. $P_n(x)$ tem n raízes reais, todos no intervalo $-1 < x < 1$.

Quando a ordem $m > 0$, as soluções linearmente independentes são funções associadas de Legendre. A fórmula de Rodrigues, neste caso, é dada por:

$$\underset{\text{grau}\,\uparrow\;\uparrow\,\text{ordem}}{P_{nm}}(x) = (-1)^m \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \underbrace{\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)}_{\substack{n-m \text{ raízes} \\ \text{no intervalo } -1<x<1}} \qquad (568)$$

Assim, como as funções associadas de Legendre são solução da equação (566), então: $\Theta(\theta) = P_{nm}(x) = P_{nm}(\cos\theta)$. Dessa forma, são soluções da equação (536):

$$u(r,\theta,\lambda) = \begin{cases} r^n \cdot P_{nm}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \lambda) \\ r^n \cdot P_{nm}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \lambda) \\ \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_{nm}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m\lambda) \\ \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_{nm}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m\lambda) \end{cases} \qquad \begin{matrix} n = 0, 1, \ldots \\ m = 0, 1, \ldots, n \end{matrix} \qquad (569)$$

Funções harmônicas esféricas.

Portanto, a solução geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas é uma série de funções harmônicas esféricas, dadas por:

$$u(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) + b_{nm} \cdot \sin(m\lambda)\right) \cdot P_{nm}(\cos\theta) \qquad (570)$$

ou

$$u(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + b_{nm} \cdot \sin(m\lambda)\right) \cdot P_{nm}(\sin\theta) \qquad (571)$$

O potencial associado aos dois principais campos de Força da Terra (gravitacional e magnético) são representados na forma de séries harmônicas esféricas truncadas. O potencial geomagnético (IGRF) é dado por:

$$V(r,\theta,\lambda) = a \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \sum_{m=0}^{N} \left[g_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + h_{nm} \cdot \sin(m\lambda)\right] P_{nm}(\cos\theta) \qquad (572)$$

sendo a = raio médio da Terra $\simeq 6378{,}1$ Km e g_{nm} e h_{nm} os coeficientes de Gauss. O potencial gravitacional (Geopotencial) é dado por:

$$U(r,\theta,\lambda) = \frac{G \cdot M}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \left(C_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m\lambda)\right) \cdot P(\cos\theta)\right) \qquad (573)$$

sendo a = o raio médio de referência. Um dos modelos mais recentes é o EGM2008, o qual possui grau 2159. EGM (Earth Gravitational Model).