Relatividade
Aula 06 - Parte 02

Marcelo G Munhoz
Edifício HEPIC, sala 212, ramal 916940
munhoz@if.usp.br

Velocidade da Luz

- Vamos refletir um pouco sobre o papel especial que a velocidade da luz tem na natureza

- Já argumentamos que, a partir das Transformações de Lorentz, matematicamente não é possível termos um referencial com velocidade maior que a velocidade da luz pois isso levaria a valores complexos nas coordenadas desse referencial, que não sabemos interpretar

- Porém, é possível enxergarmos isso de outra maneira, não baseado apenas nas contas?

Causalidade

- A resposta é sim! Podemos usar a ideia da causalidade para isso

- Já vimos vários exemplos que a ordem temporal de dois eventos diferentes pode depender do referencial

- Porém, para dois eventos em que um foi responsável pela ocorrência do outro, isto é, um foi a causa e o outro o efeito, não pode existir essa dependência com o referencial!

  - Por exemplo, você não pode ter nascido antes dos seus pais em algum referencial no Universo!

Causalidade

- A pergunta que podemos nos fazer agora é: como podemos garantir a causalidade na Teoria da Relatividade?

- Ou seja, apesar de ser possível inverter a ordem de dois eventos conforme o referencial na Teoria da Relatividade, ela é consistente com a relação entre causa e efeito?

Grandezas Invariantes

- Vamos iniciar nossa discussão observando que existem grandezas que não mudam, isto é, são invariantes por mudanças de referencial mesmo dentro da Teoria da Relatividade

- Um exemplo de grandeza invariante, que usaremos neste caso, é a relação:

$$(\Delta S_{12})^2 = (\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2$$

- chamada de **quadrado do intervalo entre os eventos 1 e 2**

Quadrado do Intervalo

- A partir das Transformações de Lorentz, é possível demonstrar que essa grandeza não muda de valor em diferentes referenciais, ou seja:

$$(\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 = (\overrightarrow{x'}_2 - \overrightarrow{x'}_1)^2 - c^2 \cdot (t'_2 - t'_1)^2$$

- qualquer que seja o referencial S' ao que se referem as coordenadas do lado direito da equação

Quadrado do Intervalo

- $(\Delta S_{12})^2 = (\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2$

- Como vimos anteriormente, para o caso de um pulso de luz, essa grandeza é nula para qualquer referencial. Mas ela pode ser positiva ou negativa em casos genéricos

- Vamos considerar cada caso, $(\Delta S_{12})^2 < 0$ e $(\Delta S_{12})^2 > 0$, separadamente

Caso $(\Delta S_{12})^2 < 0$

- Quando $(\Delta S_{12})^2 < 0$ significa que o evento 2 ocorreu depois que um sinal luminoso partindo de 1 passa pelo ponto $\vec{x}_2$ (ou vice-versa), visto que:

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 < 0 \Rightarrow |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| < c \cdot |t_2 - t_1|$$

- Essa condição permite duas situações:

- $t_2 - t_1 > |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|/c$ quando 2 ocorre depois de 1 e pode ter sido gerado por esse evento

- ou

- $t_2 - t_1 < -|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|/c$ quando 1 ocorre depois de 2 e pode ter sido gerado por esse evento

Caso $(\Delta S_{12})^2 < 0$

- Supondo um outro referencial *S*', que se desloca com a velocidade $\overrightarrow{V}$ em relação a *S*. Segundo as transformações de Lorentz, teremos:

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{x_1}}{c^2}\right) \text{ e } t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{x_2}}{c^2}\right)$$

- Portanto: $t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{\overrightarrow{V}\cdot(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x}_1)}{c^2}\right]$

Caso $(\Delta S_{12})^2 < 0$

- Como:

$$-\frac{|\vec{V}|}{c} \cdot \frac{|\vec{x_2} - \vec{x}_1|}{c} \leq \frac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \leq \frac{|\vec{V}|}{c} \cdot \frac{|\vec{x_2} - \vec{x}_1|}{c}$$

- e $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| < c \cdot |t_2 - t_1|$

- temos: $\left| \frac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \right| \leq \frac{|\vec{V}|}{c} \cdot |t_2 - t_1|$

Caso $(\Delta S_{12})^2 < 0$

- Combinando $\left| \dfrac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \right| \leq \dfrac{|\vec{V}|}{c} \cdot |t_2 - t_1|$

- com $(t_2' - t_1') = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \dfrac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \right]$ e **se** $\boxed{\dfrac{|\vec{V}|}{c} < 1}$ teremos que:

- $t_2 - t_1 > 0 \Rightarrow t_2' - t_1' > 0$ e $t_2 - t_1 < 0 \Rightarrow t_2' - t_1' < 0$

- ou seja, se o evento 2 ocorreu depois de 1 em um dado referencial, essa sequência de eventos será observada em **qualquer referencial**. A mesma conclusão pode ser tirada do inverso (se 2 ocorreu antes de 1 em um dado referencial, essa sequência de eventos será observada em qualquer referencial)

Caso $(\Delta S_{12})^2 < 0$

- Portanto, se 1 é a causa de 2 em um referencial (ou o contrário), isso só será verdade para qualquer referencial, ou seja, a causalidade só será preservada se $\frac{|\vec{V}|}{c} < 1$

- Conclui-se então que c é um limite para o movimento de qualquer objeto e referencial. Caso contrário, a causalidade, ou seja, a ordem temporal de causa e efeito poderia depender do referencial!

Caso $(\Delta S_{12})^2 > 0$

- Quando $(\Delta S_{12})^2 > 0$ significa que o evento 2 ocorreu antes que um sinal luminoso partindo de 1 passa pelo ponto $\overrightarrow{x}_2$ (ou vice-versa), visto que:

$$(\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 > 0 \Rightarrow |\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1| > c \cdot |t_2 - t_1|$$

- portanto 1 não pode ter gerado 2 (ser a causa de 2) e vice-versa.

Caso $(\Delta S_{12})^2 > 0$

- É interessante notar que neste caso, como:

$$-\frac{|\vec{V}|}{c} \cdot \frac{|\vec{x_2} - \vec{x}_1|}{c} \leq \frac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \leq \frac{|\vec{V}|}{c} \cdot \frac{|\vec{x_2} - \vec{x}_1|}{c}$$

- e $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| > c \cdot |t_2 - t_1|$

- o valor de $\left| \frac{\vec{V} \cdot (\vec{x_2} - \vec{x}_1)}{c^2} \right|$ pode ser maior ou menor que $|t_2 - t_1|$, ou seja, a ordem temporal entre os eventos pode mudar dependendo do referencial pois podemos ter $(t_2' - t_1') < 0$ ou $(t_2' - t_1') > 0$

Caso $(\Delta S_{12})^2 = 0$

- Neste caso, estamos tratando de um sinal luminoso, pois $(\Delta S_{12})^2 = (\overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 = 0$, ou seja, a distância entre os eventos 1 e 2 equivale à distância percorrida pela luz entre os instantes t_1 e t_2.