Relatividade
Aula 05 - Parte 01

Marcelo G Munhoz
Edifício HEPIC, sala 212, ramal 916940
munhoz@if.usp.br

Transformações de Coordenadas

- Uma vez constatadas algumas consequências dos princípios da Teoria da Relatividade em relação à Mecânica Clássica, como formalizar o procedimento de mudança de coordenadas entre referencias inerciais?

- Em outras palavras, como as Transformações de Galileu devem ser modificadas no contexto da Teoria da Relatividade?

Transformações de Coordenadas

- As Transformações de Galileu são substituídas pelas chamadas Transformações de Lorentz por conta da Teoria da Relatividade

- Como obter as novas transformações a partir dos princípios da Teoria da Relatividade?

- Além desses princípios, outras hipóteses são necessárias?

O que estamos “transformando"?

- Inicialmente, vamos refletir sobre o que estamos transformando de um referencial para outro

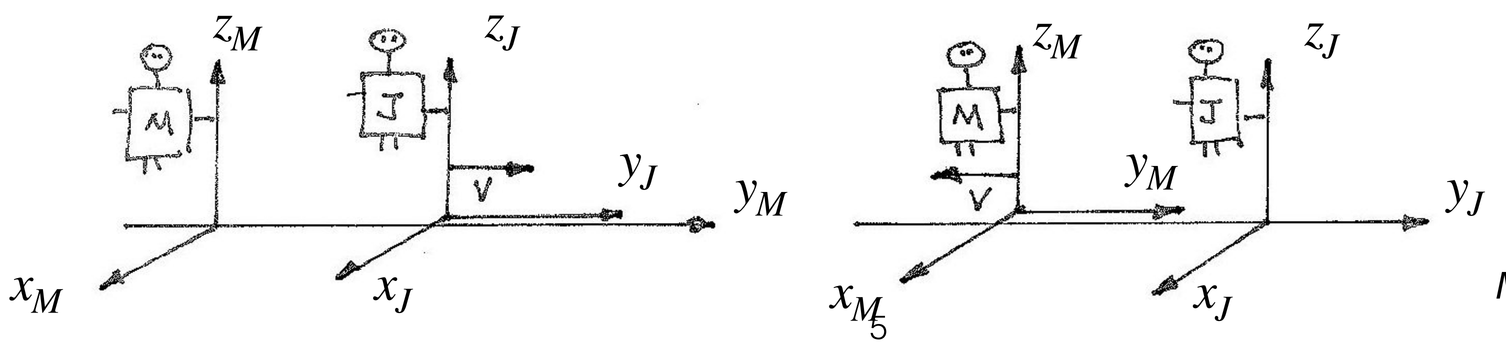
- Estamos buscando uma forma de calcular como um certo **evento** é visto em diferentes referencias inerciais

    - Um evento é algo que **realmente** ocorre num ponto do espaço e em um instante do tempo. O fato de um evento poder ser observado e registrado é que define sua realidade e sua ocorrência não depende de referencial, mas a sua **descrição** depende.

- Portanto, vamos definir um evento como algo que ocorre em uma determinada posição em um determinado instante, representado por coordenadas (x, y, z, t) em um dado referencial

O que estamos “transformando"?

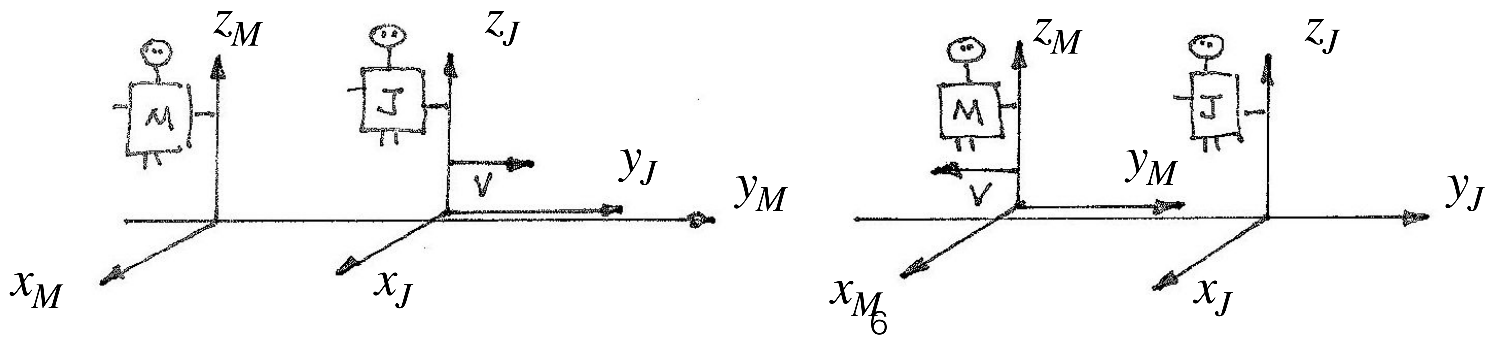
- Em seguida, queremos desenvolver um formalismo que permita representar esse evento em diferentes referenciais inerciais
- Continuando no mesmo contexto das aulas anteriores, queremos saber como representar um evento no referencial da Maria (x_M, y_M, z_M, t_M) e no referencial do João (x_J, y_J, z_J, t_J)



MJMS, Figura 18.2

O que estamos “transformando"?

- É importante explicitar que algumas condições foram assumidas para facilitar nossos cálculos:
  - os eixos dos dois referencias são paralelos ($x_M \parallel x_J, y_M \parallel y_J, z_M \parallel z_J$)
  - as origens coincidem ($O_M = O_J$) em $t_M = t_J = 0$
  - o movimento do referencial do João em relação ao referencial da Maria, é na direção y_M, y_J no sentido de y crescente com velocidade V ou o movimento do referencial da Maria em relação ao referencial do João, é na direção y_M, y_J com velocidade V no sentido de y decrescente



MJMS, Figura 18.2

Nossas Hipóteses

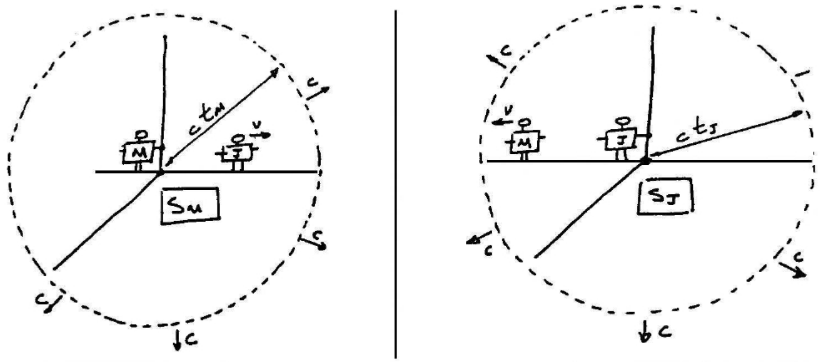
- A fim de deduzir essas transformações, vamos assumir que:

  i. um movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial da Maria também deve ser em relação ao referencial do João

  ii. para $V = 0$, a transformação deve se reduzir à identidade

  iii. se um sinal luminoso é enviado de $O_M = O_J$ em $t_M = t_J = 0$, a sua frente de onda deve se propagar com velocidade c em ambos os referenciais, de modo que:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 \cdot t_M^2 \leftrightarrow x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 \cdot t_J^2$$



MJMS, Figura 20.4

Nosso objetivo

- Essas condições implicam em **transformações lineares**, que visam preservar **a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo nos dois referenciais**

- Portanto, supondo essas condições e transformações lineares, vamos calcular como obter as coordenadas (x, y, z, t) de um determinado evento em um referencial a partir das coordenadas de outro referencial, ou seja, obter (x_J, y_J, z_J, t_J) a partir de (x_M, y_M, z_M, t_M) e vice-versa

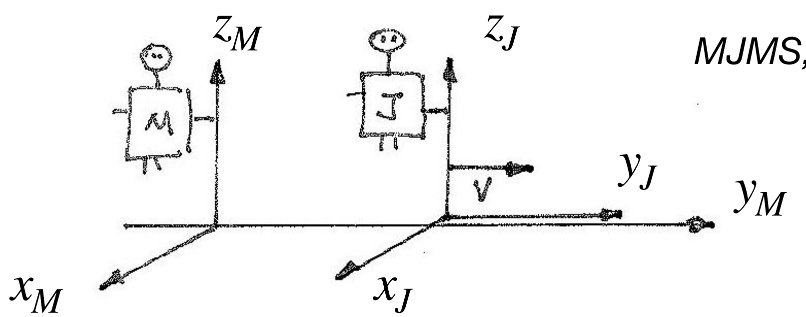
- As equações que permitem essa transformação de um referencial para outro e que são consistentes com os princípios da Teoria da Relatividade são chamadas de Transformações de Lorentz

Transformações de Lorentz

- Como no nosso exemplo o movimento é na direção y, notamos inicialmente que não há qualquer mudança nas coordenadas x e z do evento nos dois referenciais, portanto:

$$x_J = x_M$$

$$z_J = z_M$$



MJMS, Figura 18.2

Transformações de Lorentz

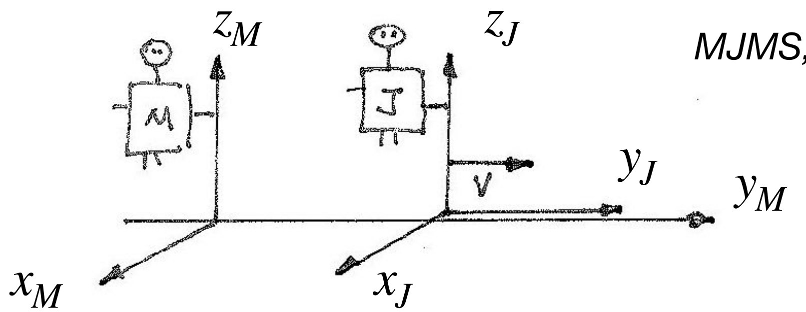
- Para a direção y, como a origem do sistema de coordenadas no referencial do João ($y_J^{O_J} = 0$) tem seu movimento descrito no referencial da Maria como:

  $$y_M^{O_J} = V \cdot t_M$$

  podemos assumir de forma geral que:

  $$y_J = A \cdot (y_M - V \cdot t_M)$$

  que é consistente com o movimento de O_J e corresponde a uma transformação linear genérica.



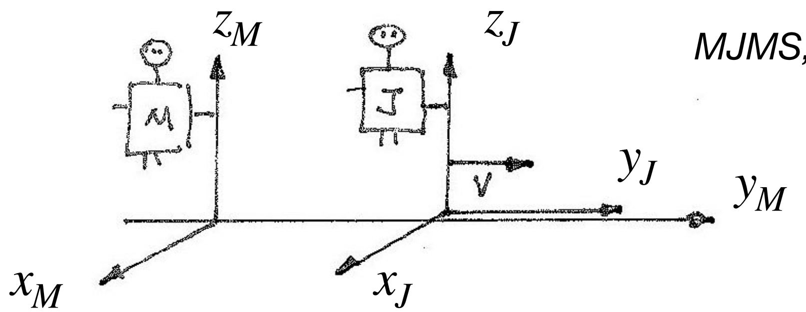
MJMS, Figura 18.2

Transformações de Lorentz

- Com relação ao tempo, também supondo uma transformação linear, podemos escrever de forma genérica:

$$t_J = B \cdot t_M + C \cdot y_M$$

onde não há termos em x_M e z_M, pois isso violaria a ideia de isotropia do espaço, pois a única direção preferencial ou identificável é a direção y



MJMS, Figura 18.2

Transformações de Lorentz

- Voltando à nossa terceira hipótese:

$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 \cdot t_J^2$, ou seja, $x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 - c^2 \cdot t_J^2 = 0$

temos:

$$x_M^2 + A^2(y_M - V \cdot t_M)^2 + z_M^2 - c^2 \cdot (B \cdot t_M + C \cdot y_M)^2 = 0$$

$$x_M^2 + z_M^2 + A^2(y_M^2 - 2 \cdot y_M \cdot V \cdot t_M + V^2 \cdot t_M^2) - c^2 \cdot (B^2 \cdot t_M^2 + 2 \cdot B \cdot t_M \cdot C \cdot y_M + C^2 \cdot y_M^2) = 0$$

e como $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 \cdot t_M^2$, que implica em $x_M^2 + z_M^2 = c^2 \cdot t_M^2 - y_M^2$, temos:

$$c^2 \cdot t_M^2 - y_M^2 + A^2(y_M^2 - 2 \cdot y_M \cdot V \cdot t_M + V^2 \cdot t_M^2) - c^2 \cdot (B^2 \cdot t_M^2 + 2 \cdot B \cdot t_M \cdot C \cdot y_M + C^2 \cdot y_M^2) = 0$$

$$(A^2 - c^2 \cdot C^2 - 1) \cdot y_M^2 - 2 \cdot (A^2 \cdot V + c^2 \cdot B \cdot C) \cdot y_M \cdot t_M + (A^2 \cdot V^2 - c^2 \cdot B^2 + c^2) \cdot t_M^2 = 0$$

Transformações de Lorentz

- Esta expressão será verdadeira para todo e qualquer valor de y_M e t_M somente se cada coeficiente for nulo, ou seja:

$$A^2 - c^2 \cdot C^2 - 1 = 0 \rightarrow A^2 - c^2 \cdot C^2 = 1$$

$$A^2 \cdot V + c^2 \cdot B \cdot C = 0 \rightarrow A^2 = -\frac{c^2}{V} \cdot C \cdot B$$

$$A^2 \cdot V^2 - c^2 \cdot B^2 + c^2 = 0 \rightarrow A^2 \frac{V^2}{c^2} - B^2 + 1 = 0$$

Transformações de Lorentz

- Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$-\frac{c^2}{V} \cdot B \cdot C - c^2 \cdot C^2 = 1$$

$$-\frac{c^2}{V} \cdot C \cdot (B + V \cdot C) = 1$$

Transformações de Lorentz

- Substituindo a segunda equação na terceira, temos:

$$-\frac{c^2}{V} \cdot B \cdot C \cdot \frac{V^2}{c^2} - B^2 + 1 = 0$$

$$-B \cdot C \cdot V - B^2 + 1 = 0$$

$$B \cdot (B + V \cdot C) = 1$$

Transformações de Lorentz

- Portanto, temos:

$$-\frac{c^2}{V} \cdot C \cdot (B + V \cdot C) = 1$$

e

$$B \cdot (B + V \cdot C) = 1$$

que finalmente leva a: $B = -\dfrac{c^2}{V} \cdot C$

Transformações de Lorentz

- Voltando à segunda equação:

$$A^2 = -\frac{c^2}{V} \cdot C \cdot B$$

que combinado com: $B = -\dfrac{c^2}{V} \cdot C$

leva a: $A^2 = B^2$

Transformações de Lorentz

- Por sua vez, substituindo $A^2 = B^2$ na terceira equação:

$$A^2 \frac{V^2}{c^2} - B^2 + 1 = 0$$

tem-se:

$$A^2 \frac{V^2}{c^2} - A^2 + 1 = 0$$

$$A^2 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1$$

Transformações de Lorentz

- Definindo:

$$\beta = \frac{V}{c} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

tem-se:

$$A = \pm B = \pm \gamma \text{ e } C = \mp \frac{V}{c^2} \cdot \gamma$$

- Pela nossa hipótese ii (slide 7), para $V = 0$ (ou seja, $\gamma = 1$) deve se ter $A = B = 1$ e $C = 0$, portanto $A = B = \gamma$ e $C = -\frac{V}{c^2} \cdot \gamma$

Transformações de Lorentz

- O que finalmente nos leva às transformações de Lorentz:

$$x_J = x_M$$

$$y_J = \gamma \left(y_M - V \cdot t_M\right)$$

$$z_J = z_M$$

$$t_J = \gamma \left(t_M - \frac{V}{c^2} \cdot y_M\right)$$, onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

Transformações de Lorentz

- É interessante notar que as transformações inversas são dadas por:

$$x_M = x_J$$

$$y_M = \gamma \left(y_J + V \cdot t_J\right)$$

$$z_M = z_J$$

$$t_M = \gamma \left(t_J + \frac{V}{c^2} \cdot y_J\right), \text{ onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- O que quer dizer que o referencial da Maria se move com velocidade -V em relação ao referencial do João

Transformações de Lorentz

- Uma observação interessante é que as Transformações de Galileu são um limite das Transformações de Lorentz para V << c ($\gamma \approx 1$ e $V/c^2 \approx 0$)

- Outra observação importante é que nada pode ter uma velocidade maior que a velocidade da luz, pois isso levaria a um valor complexo para γ