3ª Lista de Exercícios de Matemática I

Professora: Denise de Mattos

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Mostre que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$.

2. Mostre que dados números reais a, b a equação $a + x = b$ possui uma única solução $x = b + (-a)$.

3. Mostre que a soma de um racional com um irracional é um número irracional.

4. O produto de um número racional não nulo por um irracional é racional ou irracional? Justifique.

5. Mostre que $\sqrt{6}$ é irracional.

6. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > 0$ e $y > 0$, mostre que $\sqrt{x.y} \leq \frac{x+y}{2}$, ou seja, a média geométrica entre dois números reais é sempre menor ou igual do que a média aritmética.

7. Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

   a) f associa cada número real ao seu oposto.
   b) g associa cada número real ao seu cubo.
   c) h associa cada número real ao seu quadrado menos 1.
   d) k associa cada número real ao número 2.
   e) g associa cada número real à potência de base 2 desse número.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

   a) $f(2)$ b) $f(-1)$ c)$f\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ e) $f(\sqrt{3})$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $y = -\dfrac{3}{4}$ como imagem?

10. Seja $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

11. Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

12. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(3x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $f(9) = 45$, calcule $f(1)$.

13. A função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tem a seguinte propriedade : $f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$, $\forall m \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(0)$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x$. Mostre que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -2x - h + 2$, onde $h \neq 0$ é um número real fixado.

15. Simplifique a expressão $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, onde $p \neq x$ é um número real fixado nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^2$ e $p = 1$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ e $p = 1$ (c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ e $p = -3$

16. Sendo $x \geq 4$, determine o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$.

17. Determine os valores de m para os quais a função $f(x) = (m+2)x - 3$ seja

(a) crescente (b) decrescente (c) constante

Propriedade 11 (números reais) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

18. Usando a Propriedade 11 de números reis, mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

Observações Importantes: Seja $n \in \mathbb{N}$, então são válidos os seguintes resultados:

(1) Se n é ímpar, para cada número real x arbitrário, existe um único número real α tal que $\alpha^n = x$, chamado a raiz n-ésima de x e denotado por $\alpha = \sqrt[n]{x}$ ou $\alpha = x^{\frac{1}{n}}$.

(2) Se n é par, para cada número real $x \geq 0$, existe um único número real positivo α tal que $\alpha^n = x$, chamado a raiz n-ésima positiva de x denotada por $\alpha = \sqrt[n]{x}$ ou $\alpha = x^{\frac{1}{n}}$. Desde que n é par, $(-\alpha)^n = \alpha^n$ e, portanto, cada número real $x > 0$ possui duas raízes n-ésimas: α e $-\alpha$. Entretanto, os símbolos $\alpha^{\frac{1}{n}}$ e $\sqrt[n]{\alpha}$ são reservados para denotar a raiz n-ésima positiva.

(3) Se n é par e se $x < 0$, não existe um número real α tal que $\alpha^n = x$. De fato, note que se n é par, então $\alpha^n \geq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, enquanto $x < 0$.

19. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2x-7}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{4-x}}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+3)(x-3)}$ e) $f(x) = \sqrt[7]{x-9}$ f) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

g) $f(x) = \sqrt{x-2} - \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$ (h) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+2}}$

20. Determine o domínio e esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Observação Para resolver os ítens (c) e (d) do exercício a seguir lembre-se dos produtos notáveis:

(i) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

21. Determine o domínio, esboce o gráfico e analise os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x$ (b) $f(x) = -2x + 3$ (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (f) $f(x) = |x-1| + |x-2|$

(g) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (h) $f(x) = |x| + |x-2|$ (i) $f(x) = |x| - 1$

(j) $f(x) = x^2$ (k) $f(x) = -x^2$ (l) $f(x) = x|x|$

(m) $f(x) = x^2 + 1$ (n) $f(x) = x^2 - 1$ (o) $f(x) = |x^2 - 1|$

22. Estude a variação do sinal de $f(x)$ nos seguintes casos:

    (a) $f(x) = (x-1)(x+2)$ (b) $f(x) = x(1-x)$ (c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

    (d) $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ (e) $f(x) = \dfrac{2x-3}{1-2x}$ (f) $f(x) = (2x-3)(x+1)(x-2)$

23. Considere as seguintes funções f e g cujas leis de correspondência são dadas por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ e } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.$$

    f e g podem ser iguais? Justifique.

24. Considere as funções $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} \text{ e } g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}},$$

    onde $A = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$. f e g podem ser iguais? Justifique.

25. Resolva o sistema de equações: $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, onde $a \neq 0$. Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, determine o coeficiente angular a de f.

    Definição: A equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$, onde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é chamado o coeficiente agular da reta.

27. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(1, -1)$ e $(-1, 2)$.

28. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

    (a) $|x+1| < |2x-1|$ (b) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

    (c) $(3x-2)(x+1)(3-x) < 0$ (d) $\frac{1}{x-4} \leq \frac{2}{x+3}$