MAT0105 – Geometria Analítica

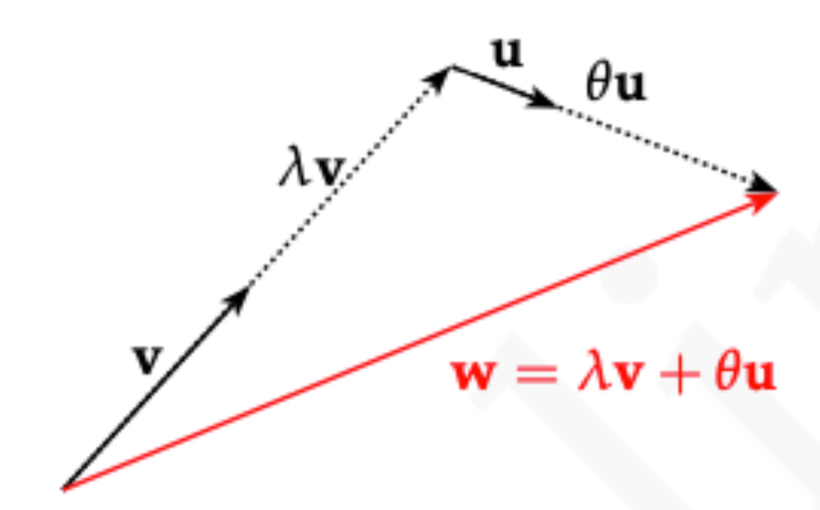
Vetores:
Combinação Linear, LD & LI

Profa. Ana Paula Jahn
anajahn@ime.usp.br

Combinação Linear

- ✓ A **adição de vetores** e a **multiplicação de um vetor por um escalar** nos permitem **obter novos** e **diferentes vetores a partir de alguns vetores dados**.

- ✓ Os vetores assim obtidos são ditos **combinação linear (c.l.)** dos vetores iniciais.



Combinação Linear

✓ Exemplo 1

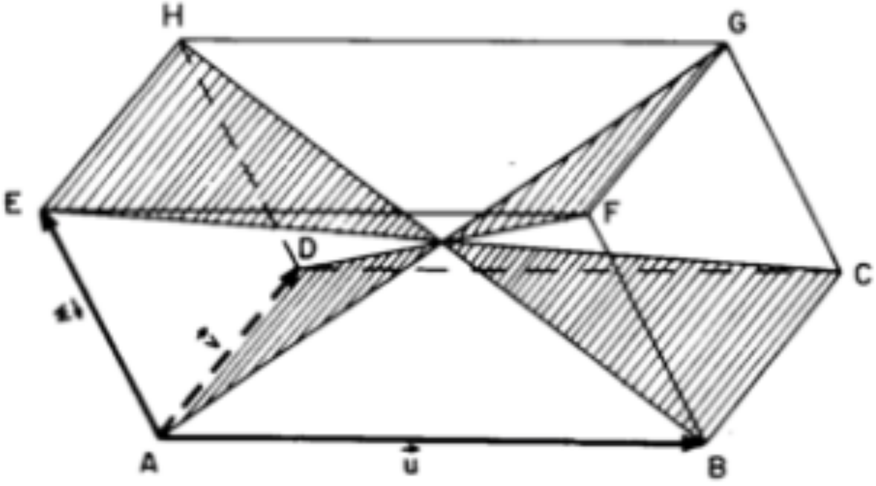
Na figura abaixo está representado um paralelepípedo *ABCDEFGH*.

Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$,

exprima $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} =$
$= \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

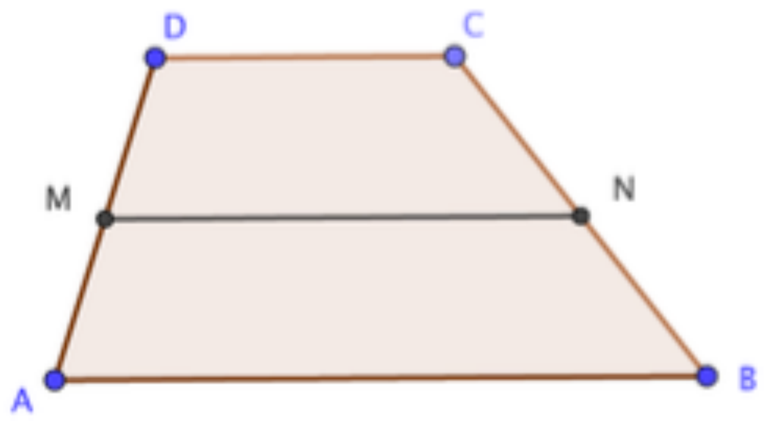
b) $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}$



Combinação Linear

✓ Exemplo 2

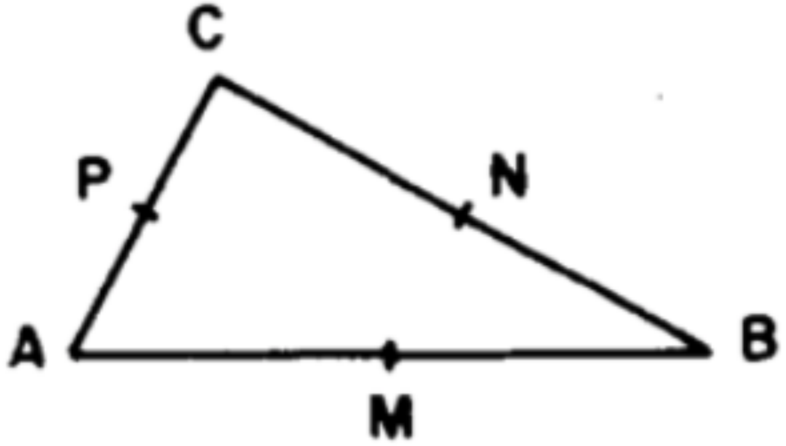
ABCD é trapézio
M, *N* pontos médios dos lados não paralelos



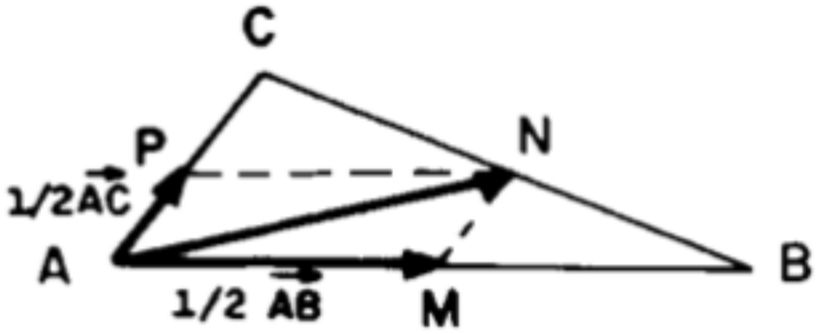
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Combinação Linear

- ✓ Exemplo 3



$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Combinação Linear

- **Geometricamente**, diz-se que $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se $\vec{v}$ é **resultante de componentes** nas direções $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$.

- **Algebricamente**, um vetor $\vec{v}$ é uma combinação linear de um conjunto dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se ele resulta da **soma de múltiplos** destes vetores.

Combinação Linear

De modo geral, se diz que $\vec{v}$ é ***combinação linear*** dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se existem escalares a_1, a_2 ... a_n tais que: $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$

Combinação Linear

No plano: $\vec{\imath} = (1, 0)$ e $\vec{\jmath} = (0, 1)$

No espaço: $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$ e $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Ex: No plano: $\vec{v} = (-3, 2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

No espaço: $\vec{u} = (4, -1, 7) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 7\vec{k}$

Pergunta: Qualquer vetor $\vec{v}$ do plano (espaço) pode ser escrito como **combinação linear** de $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ ($\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$)? Por quê?

Exercícios

Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesiano.

Exercício 1. Sejam $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (3,1)$ e $\vec{w} = (0,2)$.

(a) Escreva o vetor $\vec{x} = (8,6)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) É possível escrever $\vec{x}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de maneiras diferentes da encontrada em (a)? Se sim, exiba algumas.

(c) Escreva $\vec{x}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(d) É possível escrever $\vec{x}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de maneiras diferentes da encontrada em (c)? Se sim, exiba algumas.

(e) Escreva o vetor $\vec{y} = (a,b)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(f) O que é possível concluir?

Exercícios

Exercício 2. Sejam $\vec{k} = (3, -1)$ e $\vec{l} = (-6, 2)$.

(a) É possível escrever $\vec{w} = (5, -4)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(b) É possível escrever $\vec{z} = (2, -\frac{2}{3})$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(c) É possível escrever $\vec{y} = (a, b)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(d) O que é possível concluir?

Independência/Dependência Linear

Exercício

O vetor $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito com combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = \left(2,3,\frac{1}{3}\right)$?

Justifque sua resposta.

Independência/Dependência Linear

Um **conjunto de vetores** se diz **Linearmente Dependente** (**LD**) se houver um vetor neste conjunto que pode ser escrito como **combinação linear** dos demais.

Caso contrário, o conjunto é chamado **Linearmente Independente** (**LI**).

- ✓ Em V^2, vetores ***LD*** é sinônimo de ***vetores paralelos***
- ✓ Em V^3, vetores ***LD*** é sinônimo de ***vetores coplanares***