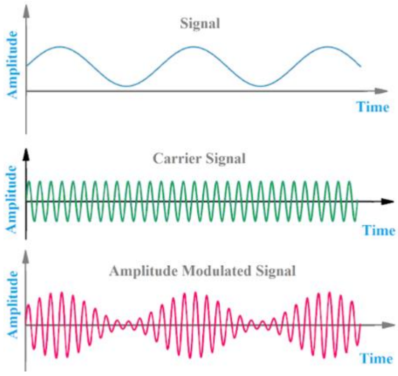
<u>Série de Exercícios 6</u>

1. Na transmissão de rádio, o primeiro esquema utilizado para transmitir sinais de áudio foi a modulação em amplitude. Como os sinais de áudio são de baixa frequência, $0 - 20kHz$, os comprimentos associados a eles são muito longos, $\lambda = c/f > 15km$! Portanto, não seria factível construir antenas para transmitir diretamente essas frequências. Além disso, sinais de baixa frequência são muito amortecidos na atmosfera, dificultando sua transmissão. A solução é fazer com que o sinal de áudio seja transmitido "montado" em uma onda de muito mais alta frequência, a "*portadora*".

O esquema consiste em multiplicar o sinal da portadora pelo sinal de áudio, como indicado na figura abaixo.



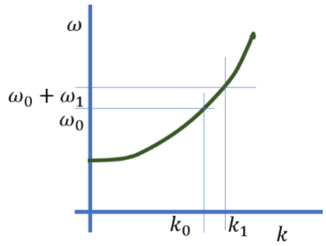
a) Considere que fonte dos sinais esteja em $z = 0$, onde os sinais sejam multiplicados, de forma que a onda seja descrita por

$$\psi(0,t) = A\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_1 t);\ \omega_1 \ll \omega_0$$

Mostre que esse sinal pode ser escrito como

$$\psi(0,t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_0 + \omega_1)t + \cos(\omega_0 - \omega_1)t]$$

b) Suponha que o sinal se propaga ao longo de um cabo coaxial ao longo do eixo z. Considere que a relação de dispersão no cabo coaxial seja como indicada na figura a seguir.



c) Mostre que, após o sinal percorrer uma distância z, o sinal será dado, aproximadamente, por

$$\psi(z,t) = \frac{A}{2}\left\{\cos\left[(\omega_0 t - k_0 z) + \omega_1\left(t - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right] + \cos\left[(\omega_0 t - k_0 z) - \omega_1\left(t - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right]\right\}$$

d) Mostre que esse sinal pode também ser escrito como

$$\psi(z,t) = A\cos\left[\omega_1\left(t - \frac{dk}{d\omega}z\right)\right]\cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

e) O segundo fator representa a onda portadora, que se propaga com velocidade de fase $v_f = \omega_0/k_0$. O primeiro fator representa a amplitude do sinal. Mostre que ela se propaga com a velocidade de grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

---

2. Siga detalhadamente o Exemplo 10.2 do texto de graduação, Griffiths, e depois faça o problema 10.11, reproduzido a seuir.

Problem 10.11

(a) Suppose the wire in Ex. 10.2 carries a linearly increasing current

$$I(t) = kt,$$

for $t > 0$. Find the electric and magnetic fields generated.

(b) Do the same for the case of a sudden burst of current:

$$I(t) = q_0\delta(t).$$

---

3. Suponha que a densidade de corrente varie lentamente no tempo, de forma que possamos aproximar sua expressão no tempo retardado pelos primeiros termos de um desenvolvimento m série de Taylor, isto é,

$$[\vec{j}(\vec{r}',t')]_{ret} = \vec{j}(\vec{r}',t) + (t'_{ret} - t)\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}',t)}{\partial t} + \cdots$$

Mostre que o campo magnético produzido por essa densidade de corrente é dado por

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

Esse resultado significa que a Lei de Biot-Sarvart continua válida nesse caso, com a densidade de corrente calculada no instante <u>não-retardado</u>.

---

4 As expressões de Heaviside-Feynman para os campos produzidos por uma carga pontual são derivadas na seção 6.5 e no problema 6.2 do Jackson, mas de uma forma um tanto confusa. Neste problema vamos obter essas expressões seguindo um roteiro mais claro.

Primeiro notemos que é possível tirar a derivada com relação a t' de dentro do colchete $[\ldots.]_{ret}$, trocando-a por uma derivada com relação a t. De facto, seja

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{r},t) = g(\vec{r},t)\,,$$

então

$$\left[\frac{\partial f(\vec{r}',t')}{\partial t'}\right]_{ret} = g\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right).$$

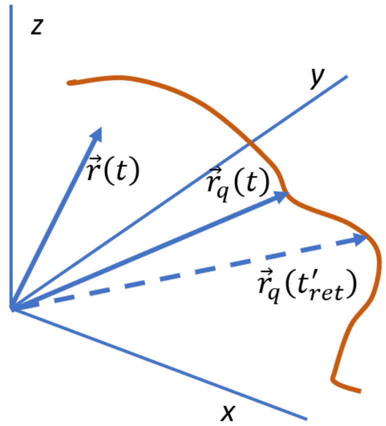
Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}[f(\vec{r}',t')]_{ret} = \frac{\partial}{\partial t}f\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) = g\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial f(\vec{r}\,',t')}{\partial t'}\right]_{ret} = \frac{\partial}{\partial t}[f(\vec{r}\,',t')]_{ret}$$

Considere agora uma carga se deslocando, de forma que a expressão para sua trajetória e sua velocidade sejam, respectivamente,

$$\vec{r} = \vec{r}_q(t); \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}_q}{dt}$$



As densidades de carga e corrente a ela associadas são, então,

$$\rho(\vec{r}\,',t') = q\delta[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t')]$$

$$\vec{j}(\vec{r}\,',t') = q\vec{v}(t')\delta[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t')]$$

a) Na expressão do campo elétrico gerado por fontes variáveis no tempo (expressão de Jefimenko – aula de 25 de maio), transfira todas as derivadas temporais para fora do colchete $[\ldots.]_{ret}$.

As integrais envolvendo o tempo retardado parecem bastante complexas porque temos que saber a posição da partícula no instante retardado que depende da distância entre $\vec{r}$ e $\vec{r}_q$ no instante retardado, ou seja, a relação entre o tempo retardado e $\vec{r}_q$ é implícita! Mesmo assim, é possível avançar usando uma técnica envolvendo a função delta.

Considerando o primeiro termo da expressão para $\vec{E}(\vec{r},t)$ e introduzindo uma integral temporal envolvendo a função delta, mostre que

$$\int \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\left[\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t')\right)\right]_{ret} dV' = \int dt'\delta(t' - t_{ret}) \int dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t')\right)$$

$$= \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t')}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|^3}\delta\big(f(t')\big)dt'$$

onde $f(t') = t' - t_{ret} = t' - t + \frac{1}{c}\left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|$ é uma função implícita de t'.

b) Essa integral pode ser feita utilizando a seguinte propriedade da função delta,

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x_i}\Big|}$$

onde x_i são os zeros da função. Nesse caso, a função só tem um zero, $t' = t_{ret}$. Calcule a derivada da função $f(t')$ e mostre que

$$\frac{df}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\left[\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right] \cdot \vec{v}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|}$$

c) Obtenha finalmente a expressão para a primeira integral na expressão para o campo elétrico

$$\int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left[\delta\left(\vec{r}'-\vec{r}_q(t')\right)\right]_{ret} dV' = \left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}_q)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3\left[1-\frac{[\vec{r}-\vec{r}_q]\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|}\right]}\right]_{ret}$$

Esse resultado é a razão para a relação que o Jackson pede para demostrar no primeiro item do problema 6.2,

$$\int dV'\delta\left[\vec{r}'-\vec{r}_q(t_{ret})\right] = \frac{1}{\kappa}\ ;\ \ \kappa = 1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_q)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|}\cdot\vec{\beta}$$

d) Complete a derivação das expressões de Heaviside-Feynman, item b) do problema 6.2.

---

5. Problema 4, capítulo 5, do livro do Professor Frenkel.

---

6. Problema 17, capítulo 5, do livro do Professor Frenkel.

7, Estude detalhadamente a seção 7.9 do Jackson, que discute o alargamento de um impulso quando ele se propaga em um meio dispersivo. Em particular, faça as passagens que levam às equações 7.91 e 7.98.

---

8. Problema 7.20, capítulo 7, do livro do Jackson.

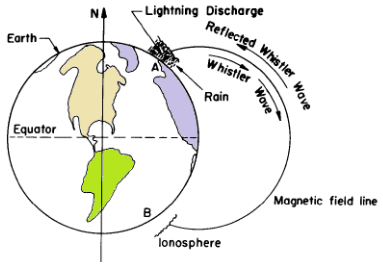
---

9. Os relâmpagos na atmosfera geram uma onda electromagnética que se propaga na ionosfera, ao longo das linhas de força do campo magnético terrestre que são denominadas “Modo Silvo” (Whistler Mode, em inglês). A relação de dispersão dessas ondas é dada por

$$k = \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_{ce}}};\ \ \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}};\ \ \omega_{ce} = \frac{eB}{m}$$

A frequência ω_p é a frequência de plasma e ω_{ce} é a frequência ciclotrônica dos elétrons. Em sua tese de doutoramento, um brasileiro, Jacyntho Angerami, utilizou a detecção dessas ondas para determinar uma importante característica da ionosfera terrestre, a chamada plasmapausa, região em que a densidade eletrônica na ionosfera sofre uma inflexão.

Para isso, ele mediu o tempo que levava um impulso da onda silvo, gerado por uma descarga atmosférica no Polo Norte, para se propagar até o Polo Sul, ser refletido, e retornar ao Polo Norte, como esquematizado na figura. Sabendo que o impulso se propaga com a velocidade de grupo, mostre que a expressão para o tempo de viagem ao longo de uma linha de força do campo geomagnético é dada por



$$t = \int \frac{\omega_p d\ell}{2c\sqrt{\omega\omega_{ce}}}$$

onde $d\ell$ é o elemento de comprimento ao longo da linha de força.

Medindo este tempo em diferentes linhas de força e tendo que a frequência de plasma depende da densidade eletrônica, ele conseguiu determinar seu perfil até várias vezes o raio da Terra.

Nota: o Professor Angerami formou-se na Escola Politécnica. Vale à pena ler a descrição da importância de seu trabalho no livro J. F. Lemaire, K. I. Gringauz, V. Bassolo; "The Earth´s Plasmasphere":

1.3.16 Angerami and studies of the magnetospheric electron density distribution

During 1965, J. J. Angerami, a graduate student from Brazil, began work at Stanford on a thesis devoted to the problem of electron density in the magnetosphere as determined from whistlers. Angerami was known as a careful, meticulous worker who inspired the confidence of others. While Carpenter worked to locate and identify the plasmapause and was investigating plasma cross-L motions, Angerami investigated the equatorial electron density profile as well as the profile of the distribution of electrons along the geomagnetic field lines. In 1964 he had published with J. O. Thomas a paper on the diffusive equilibrium distribution of ionization in the magnetosphere (Angerami and Thomas, 1964).

---

10. No modelo de Drude-Lorentz para dispersão em meios materiais, a constante dielétrica e o índice de refração ficam complexos.

a) Mostre que na ressonância, se $M \gg 1$, tem-se

$$n_r \approx n_i \approx \sqrt{\frac{I_m\epsilon_r}{2}}$$

b) Em materiais transparentes, as ressonâncias ocorrem tipicamente no ultravioleta. Mostre então que, para luz visível, o índice de refração é dado pela fórmula aproximada de Cauchy

$$n \approx 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right); \quad A, B \rightarrow constantes$$