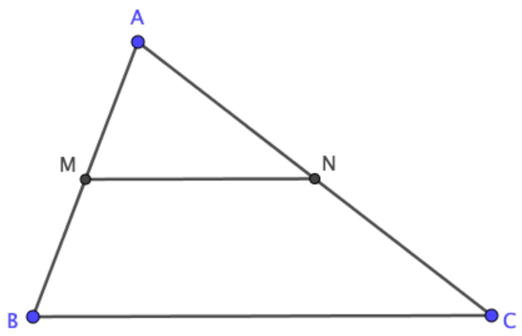
IME-USP
MAT0105 – Geometria Analítica – 1/2020
Turmas: T21 (IF) e T42 (IME)
Profa. Ana Paula Jahn

EXERCÍCIOS PARA ESTUDOS – AULA DE 12/06/2020

Prove que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste lado.



Hipóteses:
Triângulo ABC qualquer
M ponto médio do lado $\overline{AB}$
N ponto médio do lado $\overline{AC}$

Conclusão:
$\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$

Vetorialmente, tem-se:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} \quad \text{(Hip.)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

Pela definição de multiplicação por escalar, tem-se: $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$.

Obs: Podemos também escrever:

$$2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$$

$$2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$$

Somando-se membro a membro:

$$2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

Mais algumas propriedades geométricas que podem ser provadas usando vetores:

1) Prove que se os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um segundo quadrilátero, este é um paralelogramo.
   (Dica: use o teorema provado no item anterior.)

2) Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.
   (Dica: Seja *M* o ponto médio de $\overline{AC}$, prove que *M* é também ponto médio de $\overline{BD}$.)

3) A) Num triângulo *ABC*, sejam *M*, *N*, *P*, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Exprima $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

   B) Mostre que: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{O}$

Um resultado importante...

Dados dois vetores ortogonais $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.
Com $A, B \neq O = (0, 0)$ e $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$

Qual a relação entre suas coordenadas?

Vamos definir o vetor $\overrightarrow{AB} = (x' - x, y' - y)$

Se $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, por Pitágoras, tem-se:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2$$

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

Desenvolvendo:

$$x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

$$-2xx' - 2yy' = 0$$

$$xx' + yy' = 0$$

Vale também a recíproca (verifique). Logo, tem-se:

Sejam $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$ dois vetores não nulos.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Exercícios

1) Dados $A = (1, 3)$ e $B = (9, 4)$, determinar o ponto *P* do eixo *OX* tal que $A\hat{P}B = 90^o$.

Resposta: $P = (3, 0)$ ou $P' = (7, 0)$

2) Prove que as três alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto.

Dica: Adote um sistema de coordenadas cartesianas de modo que *A* e *B* pertençam ao eixo *OX* e *C* ao eixo OY. Indique as coordenadas genéricas dos vértices *A*, *B* e *C* e expresse as alturas como vetores.