Nome: Wallace da Silva Ferreira nºUSP: 10298530

MAT0130 - Equações Diferenciais I

3a. Lista de exercícios

1

a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

Solução: Encontrar as soluções da equação homogênea $y'' - y' - 2y = 0$

Resolver a equação característica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \to \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

Logo temos: $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Encontrar uma solução particular do tipo:

$y_p = ax^2 + b.x + c$, pois temos $4x^2$ é um polinômio de grau 2

$y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 4x^2 \Rightarrow 2a - 2ax - b - 2(ax^2 + b.x + c) = 4x^2$$

$$a.x^2 + x(-2a + b) + 2a - b + c = 4x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} -2a.x^2 = 4x^2 \Rightarrow a = -2 \\ -2a - 2b = 0 \Rightarrow -2.(-2) - 2b = 0 \Rightarrow b = 2 \\ 2a - b - 2c = 0 \Rightarrow -4 - 2 - 2c = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$

1) a) $y_P = -2x^2 + 2x - 3$ obtendo assim uma solução particular, logo a solução geral da equação será:

$y_G = y_H + y_P$

$y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (-2x^2) + 2x - 3$

1) b) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Solução: As soluções da equação homogênea já são conhecidas do exercício anterior, logo

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Encontrar uma solução particular do tipo $y_P = A e^{3x}$, pois e^{3x} é uma função exponencial.

$y_P' = 3Ae^{3x}$ $\quad y_P'' = 9Ae^{3x}$

$y_P'' - y_P' - 2y_P = e^{3x} \Rightarrow 9A\cancel{e^{3x}} - 3A\cancel{e^{3x}} - 2A\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}$

$\Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = 1/4$, $y_P = \frac{1}{4} e^{3x}$

Portanto a solução geral será:

$y_G = y_H + y_P \Rightarrow \boxed{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}}$

1) c) $y'' - y' - 2y = \operatorname{sen}(2x)$

Solução: $y_G = y_H + y_P$

As soluções da equação homogênea já são conhecidas do exercício anterior

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$, logo devemos encontrar uma solução particular do tipo $y_P = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)$ pois $\operatorname{sen}(2x)$ é uma função trigonométrica

$$y'_P = A\cos(2x).2 - B\operatorname{sen}(2x).2$$

$$y''_P = -4A\operatorname{sen}(2x) - 4B.\cos(2x)$$

$$-4A.\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x) - [A\cos(2x).2 - B\operatorname{sen}(2x).2] - 2[A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)] = \operatorname{sen}(2x)$$

$$-4A\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x) - 2A\cos(2x) + 2B\operatorname{sen}(2x) - 2A\operatorname{sen}(2x) - 2B\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$-6A\operatorname{sen}(2x) + 2B\operatorname{sen}(2x) - 6B\cos(2x) - 2A\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\begin{cases} -6A\cancel{\operatorname{sen}(2x)} + 2B\cancel{\operatorname{sen}(2x)} = \cancel{\operatorname{sen}(2x)} \\ -6B\cancel{\cos(2x)} - 2A\cancel{\cos(2x)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6A + 2B = 1 \\ -6B - 2A = 0 \end{cases} \begin{matrix} (\times 3) \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -6A + 2B = 1 \\ 0 - 20A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-3}{20}$$

Da onde tiramos que $B = \frac{1}{20}$.

Portanto $y_P = \frac{-3}{20}.\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)$, logo a solução geral será:

$$\boxed{y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{20}.\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)}$$

$$y_p' = A.\cos(2x).2 - B.\operatorname{sen}(2x).2$$

$$y_p'' = -4A\operatorname{sen}(2x) - 4B.\cos(2x)$$

$$-4A.\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x) - \left[A\cos(2x).2 - B.\operatorname{sen}(2x).2\right] - 2\left[A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)\right] = \operatorname{sen}(2x)$$

$$-4A.\operatorname{sen}(2x) - 4B.\cos(2x) - 2A.\cos(2x) + 2B.\operatorname{sen}(2x) - 2A\operatorname{sen}(2x) - 2B\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$-6A.\operatorname{sen}(2x) + 2B.\operatorname{sen}(2x) - 6B\cos(2x) - 2A.\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\begin{cases} -6A.\cancel{\operatorname{sen}(2x)} + 2B.\cancel{\operatorname{sen}(2x)} = \cancel{\operatorname{sen}(2x)} \\ -6B.\cancel{\cos(2x)} - 2A\cancel{\cos(2x)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6A + 2B = 1 & (\times 3) \\ -6B - 2A = 0 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} -6A + 2B = 1 \\ 0 - 20A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-3}{20}$$

Da onde tiramos que $B = \frac{1}{20}$

Portanto $y_p = \frac{-3}{20}.\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)$, logo a solução geral será:

$$\boxed{y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{20}.\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)}$$

1) d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

Solução: Encontrar as soluções da equação homogênea $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Resolver a equação característica

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

Para $\lambda = 1$ $\quad 1^3 - 6(1)^2 + 11.(1) - 6 = 0$

Logo 1 é raiz da equação característica

$$\begin{array}{l|l} \cancel{\lambda^3} - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \lambda - 1 \\ \cancel{-\lambda^3} + \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \quad \cancel{-5\lambda^2} + 11\lambda - 6 & \\ \quad \cancel{5\lambda^2} - 5\lambda & \\ \qquad 6\lambda - 6 & \\ \qquad -6\lambda + 6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(\lambda - 1).(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

As raízes de $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ são 2 e 3

Logo $y_H = C_1.e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$

2) Devemos encontrar uma solução particular do tipo $y_P = (Ax + B).e^{-x}$ pois temos o produto de um polinômio $2x$ por uma função exponencial e^{-x}.

$y'_P = A.e^{-x} - (Ax + B).e^{-x}$ $\quad y''_P = -Ae^{-x} - [Ae^{-x} - (Ax + B).e^{-x}] =$

$-Ae^{-x} - A.e^{-x} + (Ax + B).e^{-x}$

$= -2Ae^{-x} + (Ax + B).e^{-x}$

① ⓓ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

Solução: Encontrar as soluções da equação homogênea $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Resolver a equação característica

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

Para $\lambda = 1$ $\quad 1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$

Logo 1 é raiz da equação característica

$$\begin{array}{l|l} \cancel{\lambda^3} - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \lambda - 1 \\ \cancel{-\lambda^3} + \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \hline \quad \cancel{-5\lambda^2} + 11\lambda - 6 & \\ \quad \cancel{5\lambda^2} - 5\lambda & \\ \hline \qquad 6\lambda - 6 & \\ \qquad -6\lambda + 6 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(\lambda - 1).(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

As raízes de $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ são 2 e 3

Logo $y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

2) Devemos encontrar uma solução particular do tipo $y_p = (Ax + B).e^{-x}$ pois temos o produto de um polinômio $2x$ por uma função exponencial e^{-x}.

$y_p' = A.e^{-x} - (Ax + B).e^{-x}$

$y_p'' = -Ae^{-x} - [Ae^{-x} - (Ax + B).e^{-x}] =$

$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax + B).e^{-x}$

$= -2Ae^{-x} + (Ax + B).e^{-x}$

(1) (d) $y_p''' = 2Ae^{-x} + Ae^{-x} - (Ax+B).e^{-x}$

$y_p''' = 3Ae^{-x} - (Ax+B).e^{-x}$

$y_p''' - 6y_p'' + 11y_p' - 6.y_p = 2x.e^{-x}$

$3Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} - 6.(-2Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}) + 11(Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}) +$
$-6(Ax+B).e^{-x} = 2xe^{-x}$

$3Ae^{-x} - (Ax+B).e^{-x} + 12Ae^{-x} - 6.(Ax+B)e^{-x} + 11e^{-x} - 11.(Ax+B)e^{-x} - 6.(Ax+B)e^{-x} =$
$= 2xe^{-x}$

$\Rightarrow 26A.e^{-x} - 24(Ax+B).e^{-x} = 2xe^{-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 26.A.e^{-x} - 24.A.xe^{-x} - 24.B.e^{-x} = 2xe^{-x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 26A\cancel{e^{-x}} - 24B\cancel{e^{-x}} = 0 \\ -24A\cancel{xe^{-x}} = 2\cancel{xe^{-x}} \Rightarrow A = -1/12 \end{cases}$$

$26.A - 24B = 0 \Rightarrow \cancel{26}^{13}\left(\frac{-1}{\cancel{12}_6}\right) - 24B = 0 \Rightarrow -\frac{13}{6} - 24B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24B = \frac{-13}{6} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-13}{144}}$ Logo.

$y_p = \frac{-1}{12}e^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$

$y_G = y_H + y_p = \boxed{C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - \frac{e^{-x}}{12} - \frac{13e^{-x}}{144}}$

(2) (a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Solução: $y_G = y_H + y_p$

As soluções da equação homogênea $= y'' - y' - 2y = 0$ já são conhecidas do exercício anterior.

$$-24A\cancel{xe^{x}} = 2\cancel{xe^{x}} \Rightarrow A = -1/12$$

$$26 \cdot A - 24B = 0 \Rightarrow \overset{13}{\cancel{26}} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{12}_{6}}\right) - 24B = 0 \Rightarrow \frac{-13}{6} - 24B = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24B = \frac{-13}{6} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-13}{144}}$$ Logo

$$y_P = \frac{-1}{12}e^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

$$y_G = y_H + y_P = \boxed{C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - \frac{e^{x}}{12} - \frac{13e^{x}}{144}}$$

---

2) a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Solução: $y_G = y_H + y_P$

As soluções da equação homogênea $= y'' - y' - 2y = 0$ já são conhecidas do exercício anterior.

2) a) Portanto temos:

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Devemos encontrar uma solução particular y_P, usando o método de variação dos parâmetros.

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

$y_P = V_1 e^{2x} + V_2 e^{-x}$

$$\begin{cases} V_1' e^{2x} + V_2' e^{-x} = 0 \\ V_1' e^{2x} 2 - V_2' e^{-x} = e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \quad V_1' e^{2x} = -V_2' e^{-x} \Rightarrow V_1' = -V_2' e^{-3x}$$

$$2(-V_2' e^{-3x}) e^{2x} - V_2' e^{-x} = e^{3x} \Rightarrow -2V_2' e^{-x} - V_2' e^{-x} = e^{3x}$$

$$-3V_2' e^{-x} = e^{3x} \Rightarrow V_2' = \frac{-e^{4x}}{3}$$

$$V_2 = \int V_2' dx = \int -\frac{e^{4x}}{3} dx = -\frac{1}{3} \int e^{4x} dx = -\frac{1}{12} e^{4x} + \cancel{K} \to 0$$

$$V_1' = -V_2' e^{-3x} \Rightarrow V_1' = -\left(-\frac{e^{4x}}{3}\right) e^{-3x} = \frac{e^{x}}{3}$$

$$V_1 = \int V_1' dx = \int \frac{e^{x}}{3} dx = \frac{e^{x}}{3} + \cancel{K} \to 0$$

$$y_P = V_1 e^{2x} + V_2 e^{-x} \Rightarrow \frac{1}{3} e^{x} e^{2x} - \frac{1}{12} e^{4x} e^{-x} = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{12} e^{3x} = \frac{e^{3x}}{4}$$

$$\boxed{y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}}$$

② ⓑ $\ddot{x} + 4x = sen^2(2t)$

Solução: $y_G = y_H + y_P$

Devemos achar uma as soluções da equação homogênea

$x'' + 4x = 0$; resolver a equação Característica

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$X_H = A.\cos(2t) + B.sen(2t)$ agora devemos achar a solução particular

$X_P = V_1.\cos(2t) + V_2.sen(2t)$

$$\begin{cases} V_1'.\cos(2t) + V_2'.sen(2t) = 0 & (I) \\ V_1'.(-sen(2t)).2 + V_2'.\cos(2t).2 = sen^2(2t) & (II) \end{cases}$$

$$V_1'.\cos(2t) = -V_2'.sen(2t) \Rightarrow V_1' = \frac{-V_2'.sen(2t)}{\cos(2t)}$$

$$-V_2'.\frac{sen(2t)}{\cos(2t)}.(-sen(2t)).2 + V_2'.\cos(2t).2 = sen^2(2t)$$

$$\frac{V_2'.2.sen^2(2t) + V_2'.\cos^2(2t).2}{\cos(2t)} = \frac{sen^2(2t).\cos(2t)}{\cos(2t)}$$

$$V_2'.2 = sen^2(2t).\cos(2t) \Rightarrow V_2' = \frac{sen^2(2t).\cos(2t)}{2}$$

$$V_2 = \int V_2'.dt \Rightarrow \int \frac{1}{2} sen^2(2t).\cos(2t)dt = \frac{1}{2}\int (\cos(2t) - \cos^3(2t))dt$$

② b

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}\cdot(sen(6t) - 3.sen(2t).cos(4t)) + \cancel{c}^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{24}.sen(6t) - \frac{3}{2}.sen(2t)\,cos(4t) = V_2$$

$$V_1'.cos(2t) + \frac{sen^2(2t).cos(2t).sen(2t)}{2} = 0$$

$$V_1'.2.cos(2t) + cos(2t).sen^3(2t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1'.2.\cancel{cos(2t)} = -\cancel{cos(2t)}.sen^3(2t)$$

$$V_1' = -\frac{sen^3(2t)}{2} \qquad V_1 = \int -\frac{sen^3(2t)}{2}dt \Rightarrow$$

$$V_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\left(-cos(2t) + \frac{cos^3(2t)}{3}\right) + \cancel{c}^{0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}cos(2t) - \frac{1}{6}cos^3(2t) = V_1$$

$$y_p = cos(2t).\left(\frac{1}{4}cos(2t) - \frac{1}{6}cos^3(2t)\right) + sen(2t).\left(\frac{1}{24}.sen(6t) - \frac{3}{2}.sen(2t)cos(4t)\right)$$

Logo a solução geral será:

$$y_G = C_1cos(2t) + C_2sen(2t) + cos(2t).\left(\frac{1}{4}cos(2t) - \frac{1}{6}cos^3(2t)\right) + sen(2t).\left(\frac{1}{24}.sen(6t) - \frac{3}{2}.sen(2t).cos(4t)\right)$$

$$V_1' \cdot \text{Cos}(2t) + \frac{\text{sen}^2(2t)\,\text{Cos}(2t)\,\text{sen}(2t)}{2} = 0$$

$$V_1' \, 2 \, \text{Cos}(2t) + \text{Cos}(2t)\,\text{sen}^4(2t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1' \cdot 2 \, \cancel{\text{Cos}(2t)} = -\cancel{\text{Cos}(2t)}\,\text{sen}^4(2t)$$

$$V_1' = -\frac{\text{sen}^4(2t)}{2} \qquad V_1 = \int -\frac{\text{sen}^4(2t)}{2}\,dt \Rightarrow$$

$$V_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\text{Cos}(2t) + \frac{\text{Cos}^3(2t)}{3}\right) + e^{\to 0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\text{Cos}(2t) - \frac{1}{6} \cdot \text{Cos}^3(2t) = V_1$$

$$y_P = \text{Cos}(2t) \cdot \left(\frac{1}{4}\text{Cos}(2t) - \frac{1}{6}\text{Cos}^3(2t)\right) + \text{sen}(2t) \cdot \left(\frac{1}{24}\text{sen}(6t) - \frac{3}{2}\text{sen}(2t)\,\text{Cos}(4t)\right)$$

Logo a solução geral será:

$$y_G = C_1\text{Cos}(2t) + C_2\text{sen}(2t) + \text{Cos}(2t) \cdot \left(\frac{1}{4}\text{Cos}(2t) - \frac{1}{6}\text{Cos}^3(2t)\right) + \text{sen}(2t) \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot \text{sen}(6t) - \frac{3}{2}\text{sen}(2t) \cdot \text{Cos}(4t)\right)$$

② ⓒ $y^{(4)} = 5x$

Solução: Encontrar as soluções da equação homogênea

$y^{(4)} = 0 \qquad \lambda^4 = 0 \to \lambda = 0$ é a única solução

logo $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$

Agora devemos encontrar uma solução particular y_p

$$y_p = V_1\cdot(1) + V_2\cdot x + V_3\cdot x^2 + V_4\cdot x^3$$

$$\begin{cases} V_1' + V_2' x + V_3' x^2 + V_4' x^3 = 0 \\ 0 + V_2' + 2x V_3' + 3x^2 V_4' = 0 \\ 0 + 2V_3' + 6x V_4' = 0 \\ 0 + 6V_4' = 5x \end{cases}$$

$$V_4' = \frac{5x}{6} \qquad V_4 = \int \frac{5x}{6}\,dx \Rightarrow \frac{5x^2}{12} + \cancel{K} \to 0$$

$$2V_3' + \cancel{6}x\left(\frac{5x}{\cancel{6}}\right) = 0 \Rightarrow 2V_3' + 5x^2 = 0 \Rightarrow 2V_3' = -5x^2$$

$$V_3' = -\frac{5}{2}x^2 \Rightarrow V_3 = -\frac{5x^3}{6} + \cancel{K} \to 0$$

$$V_2' + \cancel{2}x\left(\frac{-5}{\cancel{2}}\right)x^2 + \cancel{3}x^2\left(\frac{5x}{\cancel{6}\,2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2' - 5x^3 + \frac{5x^3}{2} = 0 \Rightarrow V_2' = 5x^3 - \frac{5x^3}{2} \Rightarrow$$

$$V_2' = \frac{5x^3}{2} \qquad V_2 = \int \frac{5x^3}{2}\,dx = \frac{5x^4}{8} + \cancel{K} \to 0$$

(2) (c) $y^{(4)} = 5x$

Solução: Encontrar as soluções da equação homogênea

$y^{(4)} = 0 \qquad \lambda^4 = 0 \rightarrow \lambda = 0$ é a única solução

logo $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$

Agora devemos encontrar uma solução particular y_p

$y_p = V_1 \cdot (1) + V_2 \cdot x + V_3 \cdot x^2 + V_4 \cdot x^3$

$$\begin{cases} V_1' + V_2' x + V_3' x^2 + V_4' x^3 = 0 \\ 0 + V_2' + 2x V_3' + 3x^2 V_4' = 0 \\ 0 + 2V_3' + 6x V_4' = 0 \\ 0 + 6V_4' = 5x \end{cases}$$

$V_4' = \frac{5x}{6} \qquad V_4 = \int \frac{5x}{6} dx \Rightarrow \frac{5x^2}{12} + K \rightarrow 0$

$2V_3' + \cancel{6}x \left(\frac{5x}{\cancel{6}}\right) = 0 \Rightarrow 2V_3' + 5x^2 = 0 \Rightarrow 2V_3' = -5x^2$

$V_3' = -\frac{5}{2} x^2 \Rightarrow V_3 = -\frac{5x^3}{6} + K \rightarrow 0$

$V_2' + \cancel{2}x \cdot \left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right) x^2 + \cancel{3}x^2 \left(\frac{5x}{\cancel{6}2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2' - 5x^3 + \frac{5x^3}{2} = 0 \Rightarrow V_2' = 5x^3 - \frac{5x^3}{2} \Rightarrow$

$V_2' = \frac{5x^3}{2} \qquad V_2 = \int \frac{5x^3}{2} dx = \frac{5x^4}{8} + K \rightarrow 0$

(2) (c) $V_1' + \cancel{\frac{5x^3}{2}}x - \cancel{\frac{5x^2}{2}}x^2 + \frac{5x.x^3}{6} = 0$

$$V_1 = \int \frac{-5x^4}{6}dx = \frac{-\cancel{5}x^5}{\cancel{5}.6} \cancel{+k}^{\to 0} = \frac{-x^5}{6}$$

$$y_p = \frac{-x^5}{6} + \frac{5x^4.x}{8} - \frac{5x^3.x^2}{6} + \frac{5x^2.x^3}{12}$$

$$y_p = \frac{-x^5}{6} + \frac{5x^5}{8} - \frac{5x^5}{6} + \frac{5x^5}{12}$$

$$y_p = \frac{-4x^5 + 15x^5 - 20x^5 + 10x^5}{24} = \frac{x^5}{24}$$

Portanto a solução geral será:

$$y_G = C_1 + C_2.x + C_3.x^2 + C_4x^3 + \frac{x^5}{24}$$

(3) (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Solução: Os autovalores serão as raízes da equação característica dada pelo determinante:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda).(-2-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

Logo os autovalores serão $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.

(3) (B) $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Encontrar os autovalores da equação Característica dada pelo determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 + 12 = 0 \Rightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 13 = 0 \qquad \Delta = 4 - 4.1.13 < 0$$

$$\Delta = -48$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-48}}{2} \to \lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{-48}}{2} = \frac{2 + 4\sqrt{3}.i}{2} = 1 + 2\sqrt{3}i$$

$$\to \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{-48}}{2} = \frac{2 - 4\sqrt{3}.i}{2} = 1 - 2\sqrt{3}i$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{3}i$ e $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$

---

(3) (C) $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Como a matriz não é quadrada não é possível calcular seu determinante, logo não é possível encontrar encontrar a equação Característica e calcular os autovalores.

(4)

(a) $W[x,y] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$

(b) Pelas definições apresentadas, temos que os vetores $x(t)$ e $y(t)$ serão LD num intervalo $a<t<b$ se existirem um conjunto de constantes C_1 e C_2, não todas nulas tais que

$C_1 . x(t) + C_2 . y(t) = 0$ para todo t no intervalo.

Caso contrário $x(t)$ e $y(t)$ serão L.i e a igualdade $C_1 . x(t) + C_2 . y(t) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$ para todo t em $]a, b[$, mesmo que sejam LD em algum ponto.

No caso acima, o Wronskiano entre $x(t)$ e $y(t)$ é t^2, implicando que $W(t) = 0$ apenas quando $t=0$, logo $x(t)$ e $y(t)$ são Li, para todo t no intervalo.

(c) Pelo Teorema 4 no PDF, os coeficientes precisam ser contínuos, para fazer valer o lema 10, no qual $x(t)$ e $y(t)$ são soluções Li no intervalo $I \Rightarrow$ $W[x,y] \neq 0 \ \forall \ t \in I$.

(4) (d) Para $x(t)$ temos

$$\begin{bmatrix} t' \\ 1' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_{11}t + a_{12} & (I) \\ 0 = a_{21}t + a_{22} & (II) \end{cases}$$

Para $y(t)$, temos: $\begin{cases} (t^2)' = a_{11}(t)^2 + a_{12}2t & (III) \\ (2t)' = a_{21}t + a_{22}2t & (IV) \end{cases}$

Comparando-se as equações (I) e (III)

$$\begin{cases} 1 = a_{11}t + a_{12} & \cdot(-t) \\ 2t = a_{11}t^2 + a_{12}2t & \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} a_{11}t + a_{12} = 1 \\ a_{12}t = t \Rightarrow a_{12} = 1 \end{cases}$$

$$a_{11}t + 1 = 1 \Rightarrow a_{11}t = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

Iremos comparar agora as equações (II) e (IV):

$$\begin{cases} a_{21}t^2 + a_{22}2t = 2 & \div(t) \\ a_{21}t + a_{22} = 0 & \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} a_{21}t^2 + a_{22}2t = 2 \\ 0 - a_{22} = -2/t \end{cases}$$

$$\boxed{a_{22} = 2/t} \qquad a_{21}t^2 + \frac{2}{\cancel{t}}2\cancel{t} = 2 \Rightarrow a_{21}t^2 = -2 \Rightarrow a_{21} = -2/t^2$$

Obtivemos 2 coeficientes constantes, e 2 que estão em função de t, em que $t \neq 0$. Pelo item C, para que $x(t)$ e $y(t)$ fossem soluções de uma E.D.O não deveríamos encontrar pontos de descontinuidade, logo $x(t)$ e $y(t)$ não são soluções da E.D.O.

4

d) Para $x(t)$ temos

$$\begin{bmatrix} t' \\ 1' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_{11}t + a_{12} & (I) \\ 0 = a_{21}t + a_{22} & (II) \end{cases}$$

Para $y(t)$, temos: $\begin{cases} (t^2)' = a_{11}(t)^2 + a_{12}2t & (III) \\ (2t)' = a_{21}t + a_{22}2t & (IV) \end{cases}$

Comparando-se as equações (I) e (III)

$$\begin{cases} 1 = a_{11}t + a_{12} & \times(-t) \\ 2t = a_{11}t^2 + a_{12}2t & (+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}t + a_{12} = 1 \\ a_{12}t = t \Rightarrow a_{12} = 1 \end{cases}$$

$$a_{11}t + 1 = 1 \Rightarrow a_{11}t = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

Iremos comparar agora as equações (II) e (IV):

$$\begin{cases} a_{21}t^2 + a_{22}2t = 2 & \times(-t) \\ a_{21}t + a_{22} = 0 & (+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}t^2 + a_{22}2t = 2 \\ 0 - a_{22} = -2/t \end{cases}$$

$$\boxed{a_{22} = 2/t} \qquad a_{21}t^2 + \frac{2}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t} = 2 \Rightarrow a_{21}t^2 = -2 \Rightarrow a_{21} = -2/t^2$$

Obtivemos 2 coeficientes constantes, e 2 que estão em função de t, em que $t \neq 0$. Pelo item C, para que $x(t)$ e $y(t)$ fossem soluções de uma E.D.O não deveríamos encontrar pontos de descontinuidade, logo $x(t)$ e $y(t)$ não são soluções da E.D.O.