

# Torção

Prof. Alfredo Gay Neto

Prof. Miguel Bucalem



**PEFUSP**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

**PEF 5716**

# Torção de barras com seção circular/tubular PEFUSP

- ▶ Trata-se de um problema clássico da resistência dos materiais
  - Pequenos ângulos de torção
  - Seção transversal permanece plana
  - Material elástico linear

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

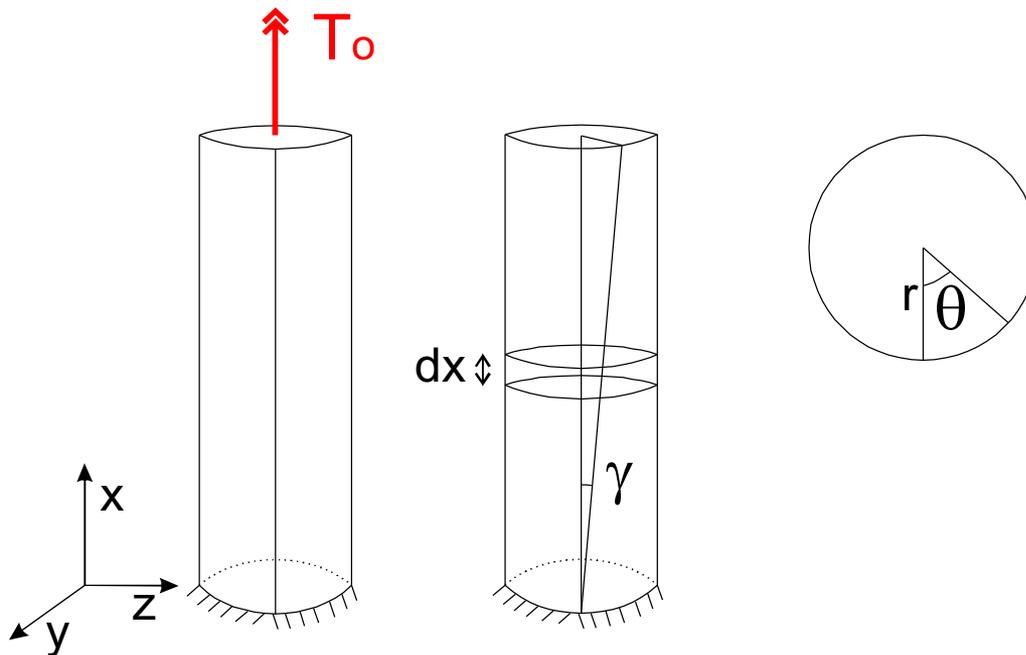
$$\tau = G\gamma$$

Relação geométrica:

$$rd\theta = \gamma dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{r}\gamma = \frac{\tau}{Gr}$$

$$\tau = Gr \frac{d\theta}{dx}$$



▶ Torque (T)

$$T = \int_A r\tau dA = \int_A r \left( Gr \frac{d\theta}{dx} \right) dA = G \frac{d\theta}{dx} \int_A r^2 dA = GJ \frac{d\theta}{dx}$$

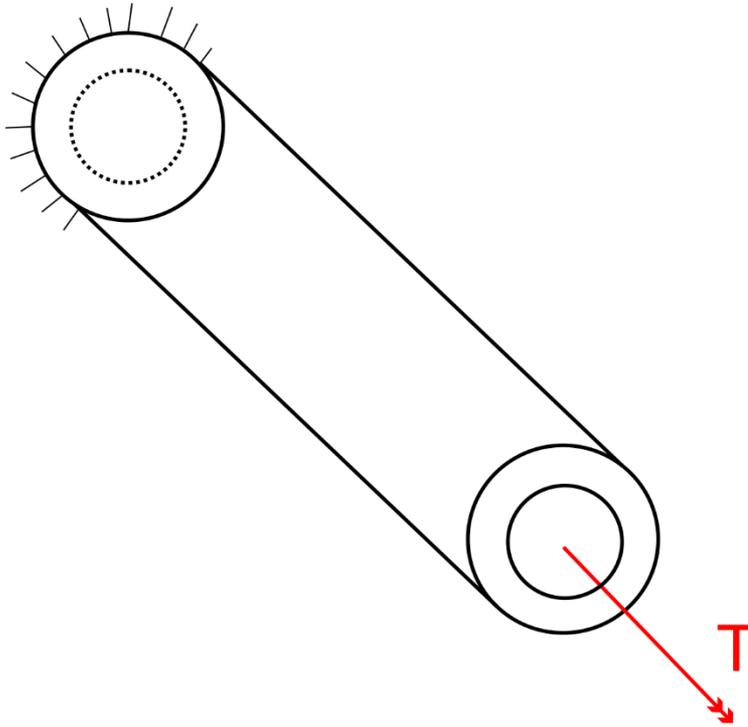
▶ Tensões de cisalhamento

$$\tau = Gr \frac{T}{GJ} = \frac{Tr}{J}$$

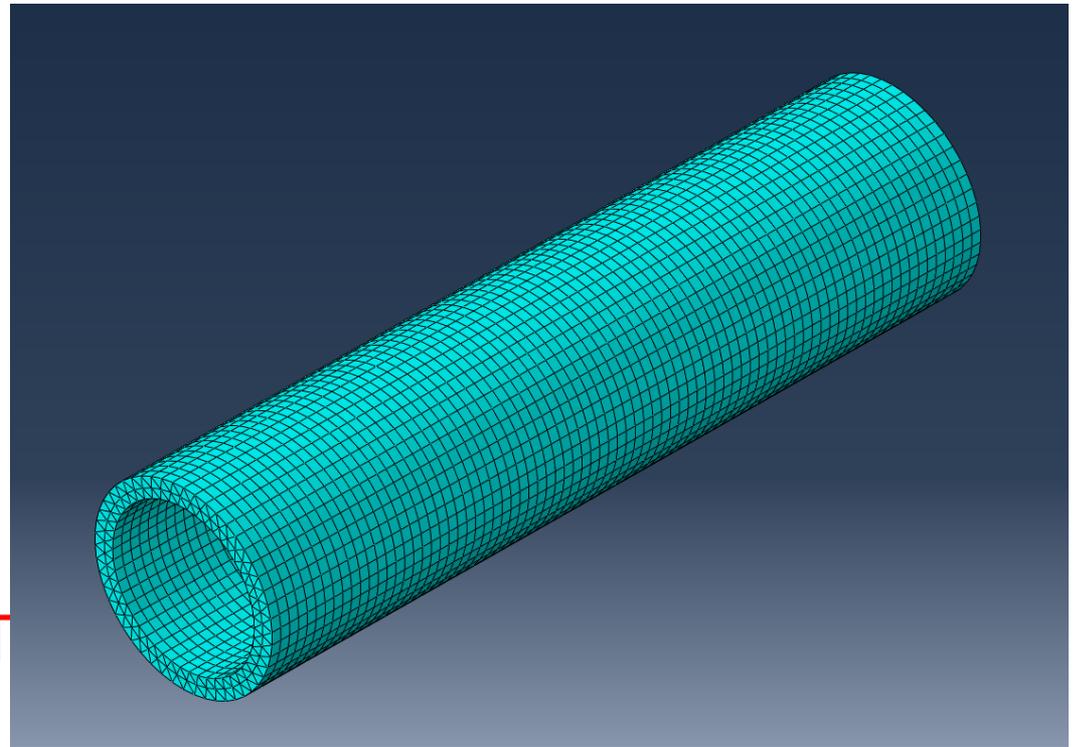
- Variação linear da tensão cisalhante ao longo do raio
- Reciprocidade da tensão de cisalhamento
  - Distorção no plano da seção transversal implica em distorção no plano ortogonal à seção transversal

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta'$$

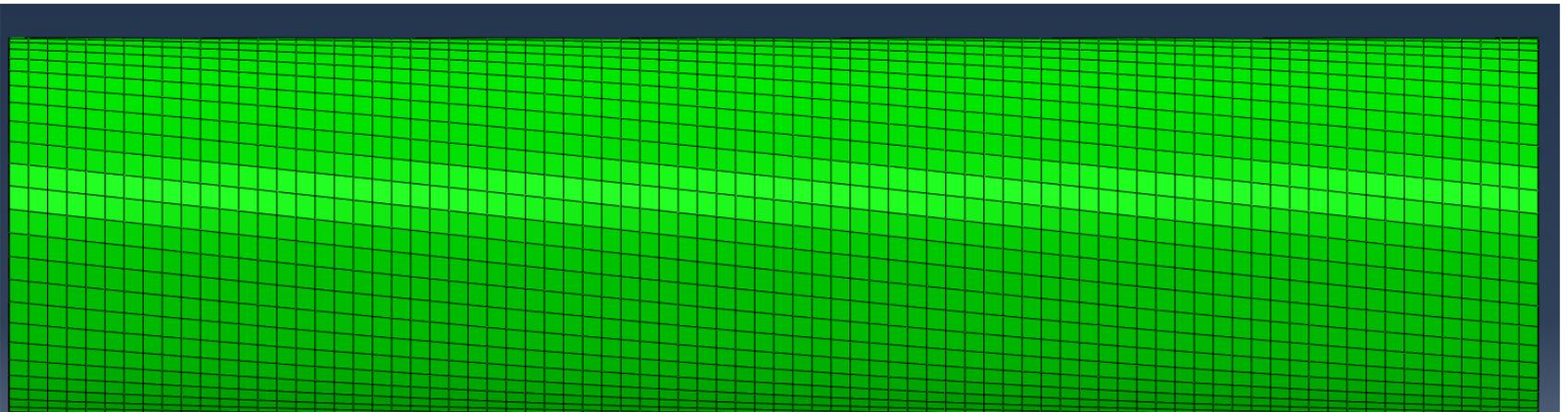
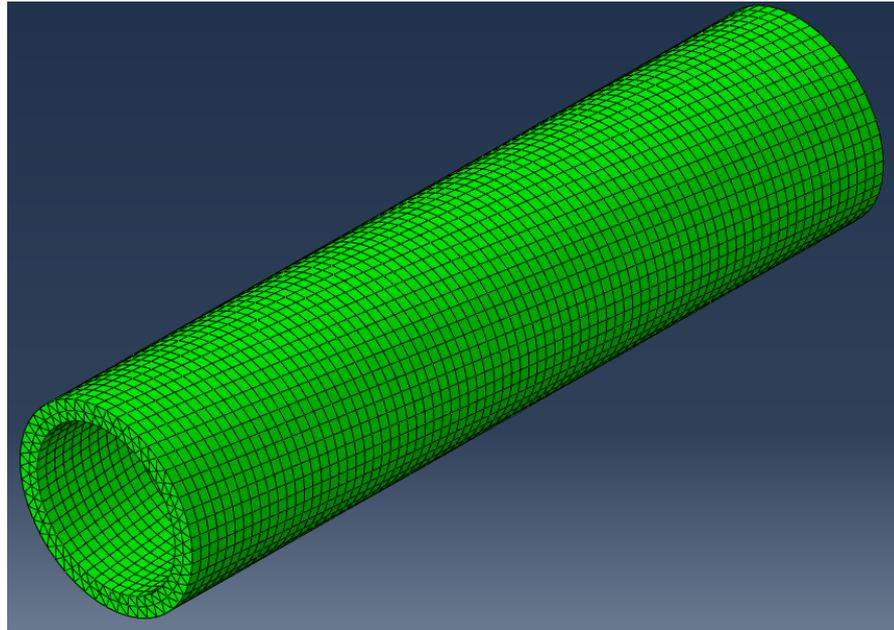
- ▶ Torção de um tubo circular



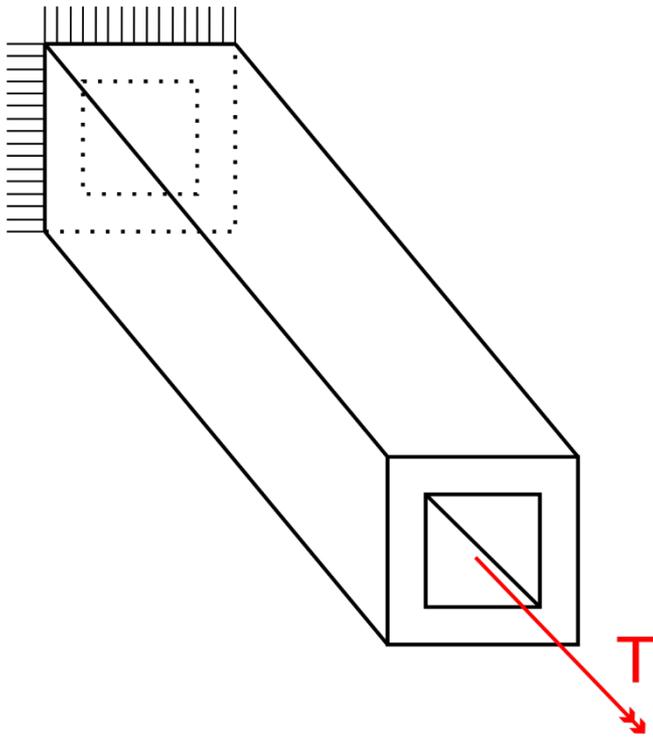
Malha do Método dos Elementos Finitos (MEF)



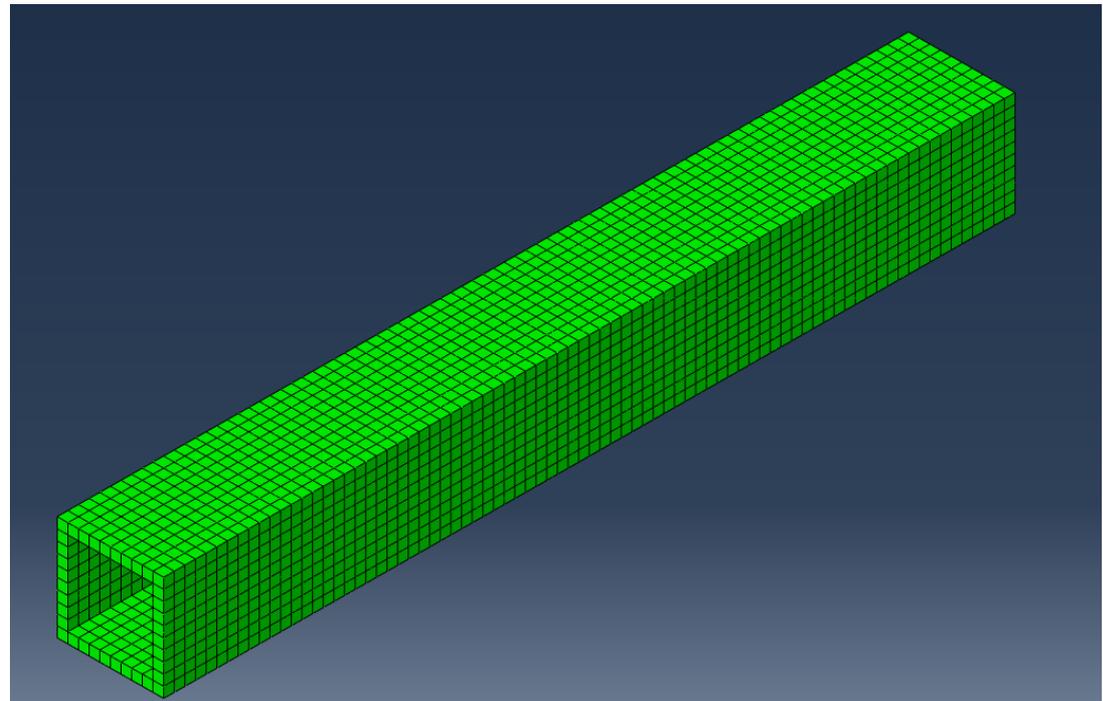
# Configuração deformada



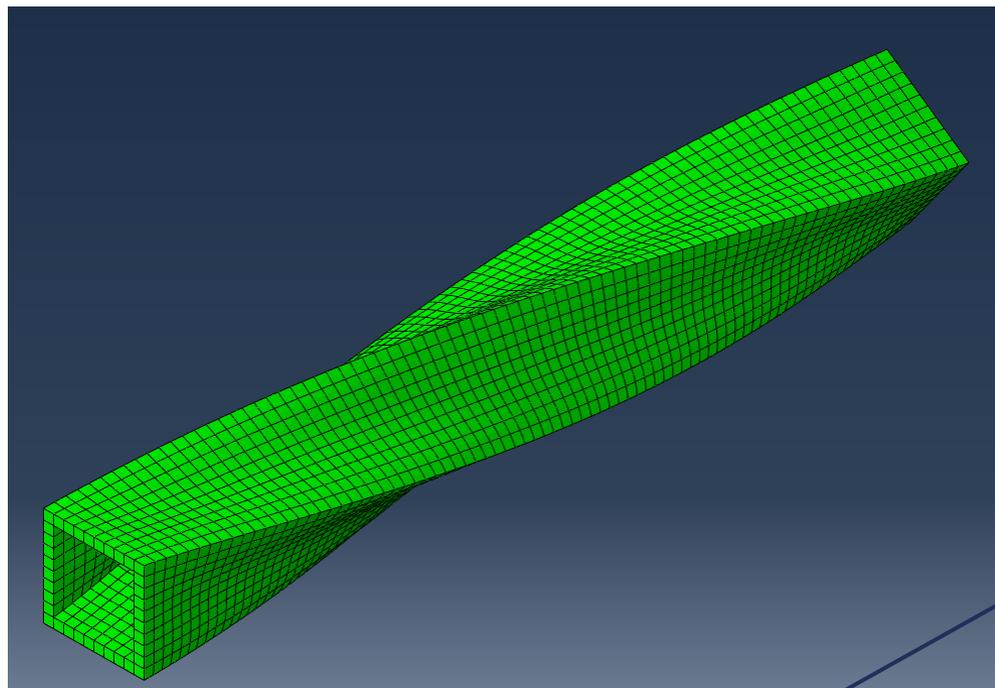
- ▶ Torção de um tubo quadrado



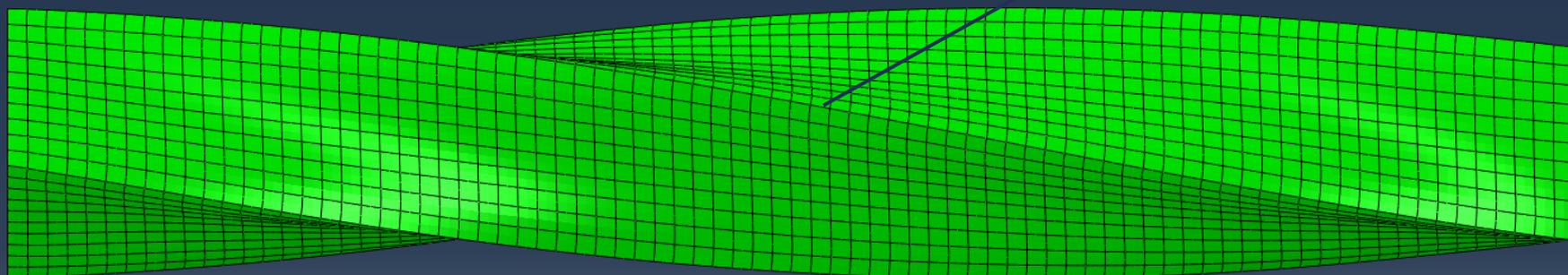
Malha do Método dos Elementos Finitos (MEF)



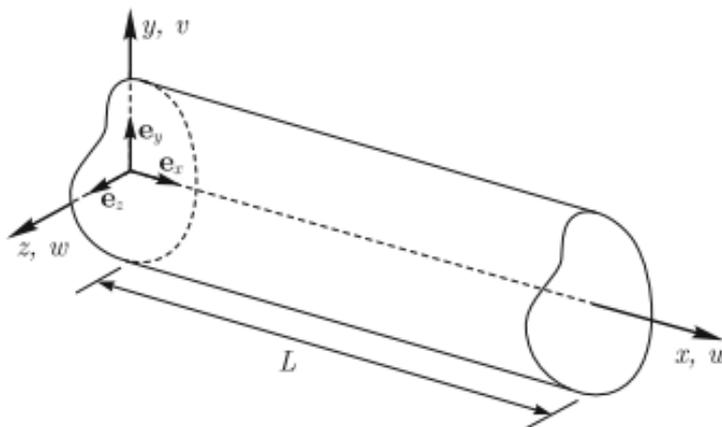
# Configuração deformada



Detalhe do empenamento da seção



- ▶ A seção transversal circular não empena
- ▶ A seção transversal retangular apresenta empenamento
- ▶ É necessário desenvolver uma teoria de torção mais ampla para prever o empenamento da seção transversal
  - Torção uniforme de Saint–Venant
- ▶ Método semi–inverso
  - Proposição de um campo cinemático com base em intuição para posterior verificação de sua validade

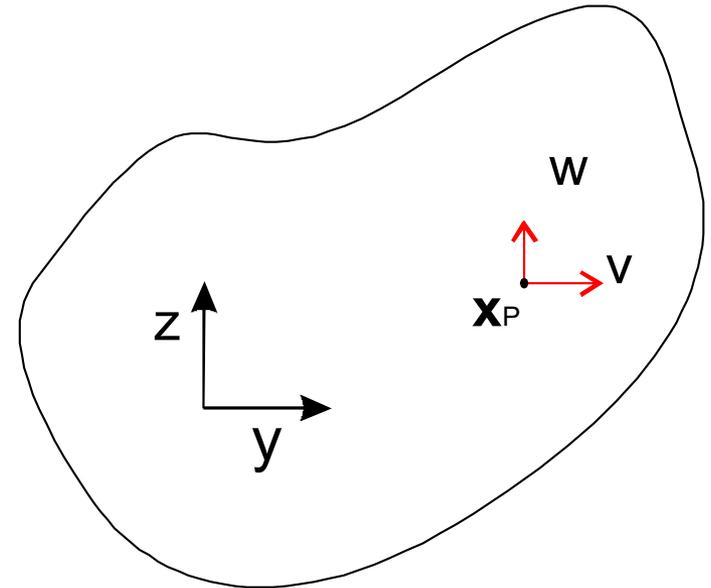


Barra submetida a momentos de torção auto equilibrados nas seções de extremidade:

$$\mathbf{M}_t = M_t \mathbf{e}_x \text{ em } x = L$$

$$\mathbf{M}_t = -M_t \mathbf{e}_x \text{ em } x = 0$$

- O movimento de cada seção transversal é decomposto em duas partes:
  - Rotação da seção (como no caso da seção circular)
  - Empenamento da seção (movimento ortogonal ao plano da seção)
  - Assumem-se pequenas rotações



$$u = \psi(y, z)\theta'$$

$$v = -\theta'xz$$

$$w = +\theta'xy$$

$\theta'x$  é a magnitude da rotação de uma seção transversal

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \textit{constante}$$

$$\theta(x) = \theta'x$$

$$\textit{assumindo } \theta(0) = 0$$

$\theta'$  - taxa de rotação

$\psi(y, z)$  - função de empenamento

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \psi}{\partial y} - \theta' z = \theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z} + \theta' y = \theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta' x + \theta' x = 0$$

Considerando o material homogêneo e isotrópico:

$$\tau_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right]$$

$$\tau_{yy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right]$$

$$\tau_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right]$$

Que leva a:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$$

Para as tensões de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta' \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta' \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + y \right)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

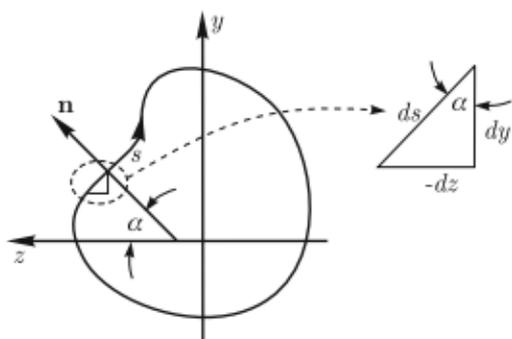
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0$$

Que leva à equação de Laplace em  $\psi$  :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

- ▶ Superfícies laterais se encontram descarregadas (tensão nula)
- ▶ A tensão de cisalhamento no plano da seção transversal, ao longo de uma curva perimetral, deve ser tangente à curva



$$n_y = \text{sen}(\alpha)$$

$$n_z = \text{cos}(\alpha)$$

$$ds \text{cos}(\alpha) = dy$$

$$ds \text{sen}(\alpha) = -dz$$

*Figura 2. Seção transversal genérica.*

$$\mathbf{Tn} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0$$

Substituindo  $n_y$  e  $n_z$  na equação anterior:

$$\tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0$$

Substituindo  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ :

$$G\theta' \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + y \right) \frac{dy}{ds} - G\theta' \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + y \right) \frac{dy}{ds} - \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} = 0$$

Determinar  $\psi(y, z)$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ no dom\u00ednio da se\u00e7\u00e3o} \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \frac{dy}{ds} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} = 0 \text{ no contorno} \end{array} \right.$$

Note que a solu\u00e7\u00e3o  $\psi(y, z)$  depende somente da forma da se\u00e7\u00e3o transversal

- ▶ A primeira equação de equilíbrio implica em:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

- ▶ Observando esse resultado, podemos propor uma função  $\varphi$  tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau_{xy} \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\tau_{xz}$$

- ▶ Essa função é denominada Função de Prandtl
- ▶ Satisfaz naturalmente o equilíbrio
  - Se  $\varphi$  apresenta suas derivadas cruzadas de ordem 2 contínuas em todo o domínio, então vale (Teorema de Schwarz):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}$$

# Relacionando com a função empenamento...

Pode-se escrever:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = G\theta' \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - 1 \right)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -G\theta' \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + 1 \right)$$

E obter-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2G\theta'$$

(assumindo-se que a função empenamento também obedece as condições do Teorema de Schwarz)

- ▶ Temos a condição já definida para o contorno da seção transversal:

$$\tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0$$

- ▶ Substituindo as expressões das tensões, escritas com a função de Prandtl:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0$$

- ▶ Essa expressão pode ser interpretada como sendo a derivada total (substantiva) de  $\varphi$  em relação a  $s$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

- ▶ Conclusão: a função de Prandtl deve ser constante no contorno. Em particular, podemos adotar o valor nulo.

Determinar  $\varphi(y, z)$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2G\theta' \text{ no dom\u00ednio da se\u00e7\u00e3o} \\ \varphi = 0 \text{ no contorno} \end{cases}$$

Tendo-se determinado  $\varphi$ : obtem-se  $\psi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

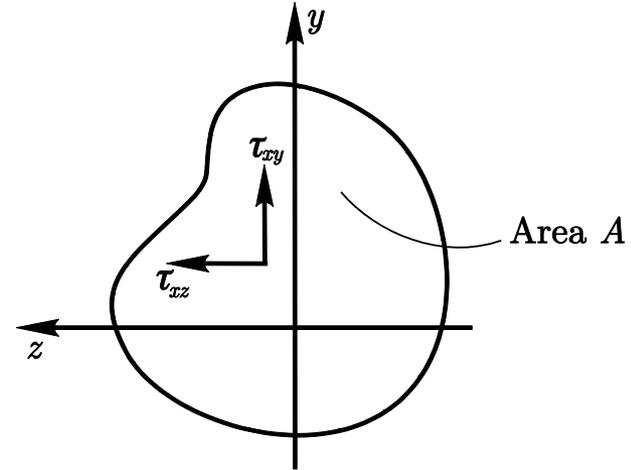
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

# Integrando as tensões: obtenção dos esforços solicitantes

Considere:

$$f^S = T e_x \text{ em } x = L$$

$$\begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$



$$N = \int_A \tau_{xx} dA = 0, M_y = \int_A \tau_{xx} z dA = 0, M_z = \int_A -\tau_{xx} y dA = 0$$

Por integração de  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  escritas em termos de  $\varphi$ , mostra-se que:

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0, V_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

O único esforço solicitante não nulo é o momento de torção:

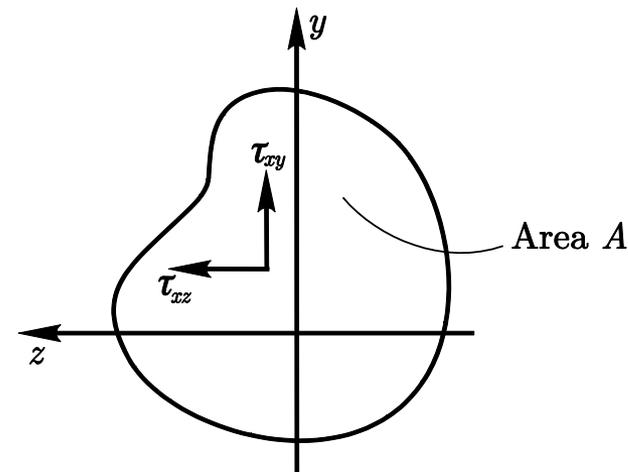
$$M_t = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA$$

Que resulta em (Teorema do Divergente):

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA$$

e:

$$M_t = G\theta' \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) y - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) z \right] dA = G\theta' \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) + (y^2 + z^2) \right] dA$$



O que permite definir:

$$I_t = \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) + (y^2 + z^2) \right] dA$$

Onde:

$I_t$  – Momento de inércia à torção.

E portanto:

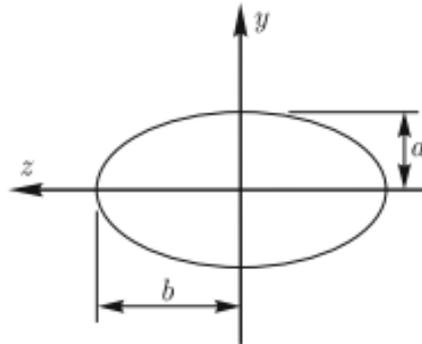
$$\frac{M_t}{GI_t} = \theta'$$

Deduções análogas podem ser feitas para  $x = 0$ .

# Exemplo – Seção transversal elíptica

Barra de seção elíptica submetida a momentos auto equilibrados

$$\mathbf{M}_t = M_t \mathbf{e}_x \text{ em } x = L \text{ e}$$
$$-\mathbf{M}_t \text{ para } x = 0$$



# Exemplo – Seção transversal elíptica

Considere a função:

$$\varphi = C \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

com  $C$  sendo uma constante real.

Satisfaz  $\varphi = 0$  no contorno e  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2G\theta'$  no domínio da seção quando:

$$C = -\frac{a^2 b^2 G \theta'}{a^2 + b^2}$$

Portanto:

$$\varphi = -\frac{a^2 b^2 G \theta'}{a^2 + b^2} \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

# Exemplo – Seção transversal elíptica

E resulta em:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right) = -\frac{2a^2}{a^2+b^2}z, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right) = \frac{2b^2}{a^2+b^2}y$$

E por integração de  $\psi$  :

$$\psi = yz - \frac{2a^2}{a^2+b^2}zy + f(z)$$

$$\psi = -yz + \frac{2b^2}{a^2+b^2}zy + f(y)$$

# Exemplo – Seção transversal elíptica

Resultando:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}zy + K$$

onde  $K$  é uma constante real.

Admitindo-se  $u = 0$  para  $y = z = 0$ , tem-se:

$$\psi(y, z) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}zy$$

# Exemplo – Seção transversal elíptica

Usando:

$$I_t = \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) + (y^2 + z^2) \right] dA$$

Chega-se a:

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

E pode-se calcular:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{M_t}{G} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}$$

# Exemplo – Seção transversal elíptica

Os deslocamentos são dados por:

$$u = \theta' \psi(y, z) = \frac{M_t b^2 - a^2}{G \pi a^3 b^3} yz$$

$$v = -\theta' xz = -\frac{M_t b^2 + a^2}{G \pi a^3 b^3} xz$$

$$w = \theta' xy = \frac{M_t b^2 + a^2}{G \pi a^3 b^3} xy$$

E as tensões:

$$\tau_{xy} = \frac{-2M_t a^2}{\pi a^3 b^3} z$$

$$\tau_{xz} = \frac{2M_t b^2}{\pi a^3 b^3} y$$

# Exemplo – Seção transversal elíptica

Graficamente:

