Lista 5

Nícolas André da Costa Morazotti

9 de Junho de 2020

Questão 1

A figura 1 mostra um fio em formato de semicircunferência de raio R, que conduz uma corrente I. O fio está imerso num campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, paralelo ao plano do semicírculo, como mostra o painel superior da figura. Divida o fio em N segmentos iguais, de comprimento $\mathrm{d}l = \pi R/N$. Considere N suficientemente grande para que cada segmento possa ser tratado como reto. O ângulo α_j entre a horizontal e a reta que une o j-ésimo segmento ao centro do semicírculo é $(\pi j/N)$rad $(j = 1, 2, \ldots, N)$, como mostra o painel inferior da figura. Dado α_j, encontre o vetor $\mathrm{d}\mathbf{l}_j$, com módulo igual ao comprimento do segmento j, direção do fio no mesmo trecho e sentido da corrente, no sistema de coordenadas indicado. *Sugestão: para começar, encontre o versor que aponta do centro para o segmento; em seguida, para encontrar o versor perpendicular a ele, use a seguinte propriedade dos vetores bidimensionais: dado um vetor* $\mathbf{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$*, um vetor* $\mathbf{w}$ *ortogonal a ele é dado pela expressão*

$$\mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

onde det *é o determinante da matriz.*

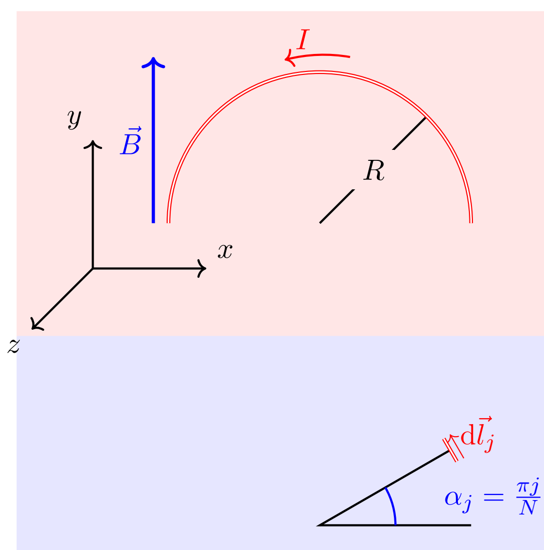


Figura 1: Questões 1-4.

Seguindo a sugestão da questão, faremos um versor ortogonal ao versor $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$, que chamaremos de $\hat{\theta}$ não é coincidência. Então,

$$\hat{\theta} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \hat{x} & \hat{y} \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$= -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}. \tag{3}$$

Veja que ele é ortogonal a $\hat{r}$, aponta no sentido anti-horário, **acompanhando** o crescimento de θ. Daí o nome. Para cada j que consideramos, o versor daquele j é $\hat{\theta}_j = -\sin(\pi j/N)\hat{x} + \cos(\pi j/N)\hat{y}$. O comprimento do segmento, como dado, é $dl = \pi R/N$. Assim,

$$\mathrm{d}\mathbf{l}_j = -\frac{\pi R}{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x} + \frac{\pi R}{N}\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{y}. \tag{4}$$

Questão 2

Calcule a força que o campo magnético exerce sobre cada segmento j ($j = 1, \ldots, N$) definido na questão 1.

A força que cada segmento sofre pode ser escrita utilizando a força de Lorentz:

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_j = I\mathrm{d}\mathbf{l}_j \times \mathbf{B}. \tag{5}$$

Considerando o campo magnético como $\mathbf{B} = B\hat{y}$, e substituindo cada um dos d$\mathbf{l})j$, temos

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_j = BI\frac{\pi R}{N}\left[-\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x} + \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{y}\right] \times \hat{y} \tag{6}$$

$$= -BI\frac{\pi R}{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{z} \tag{7}$$

Questão 3

A partir da resposta da questão 2, encontre a força que o campo magnético exerce no semicírculo da questão 1.

Para encontrar a força, basta agora somar sobre todos os elementos j.

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{F}_j \tag{8}$$

$$= -\hat{z}BI\frac{\pi R}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right). \tag{9}$$

Precisamos tratar a somatória. Utilizaremos aqui a fórmula de Euler para transformar o seno em exponenciais.

$$\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \mathrm{Im}\left[\sum_{j=1}^{N}\exp\left(j\frac{i\pi}{N}\right)\right] \tag{10}$$

$$= \mathrm{Im}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(e^{i\pi/N}\right)^{j}\right] \tag{11}$$

O que temos é uma soma de PG, do termo a_1 ao termo a_N; temos a soma $\sum_{j=1}^{N} q^j = (1-q^N)/(1-q)$, com $q = e^{i\pi/N}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\pi/N}}\right] \tag{12}$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{1-(-1)}{1-e^{i\pi/N}}\right] \tag{13}$$

$$= 2\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1-e^{i\pi/N}}\right]. \tag{14}$$

Usando novamente a fórmula de Euler para transformar a exponencial em senos e cossenos, temos

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) = 2\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1-\cos(\pi/N) - i\sin(\pi/N)}\right]. \tag{15}$$

Chamando $a \equiv 1-\cos(\pi/N)$ e $b \equiv \sin(\pi/N)$, temos

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) = 2\mathrm{Im}\left[\frac{1}{a-ib}\right] \tag{16}$$

$$= 2\mathrm{Im}\left[\frac{1}{a-ib}\cdot\frac{a+ib}{a+ib}\right] \tag{17}$$

$$= 2\mathrm{Im}\left[\frac{a+ib}{a^2+b^2}\right] \tag{18}$$

$$= 2\frac{b}{a^2+b^2} \tag{19}$$

$$= 2\frac{\sin(\pi/N)}{[1-\cos(\pi/N)]^2+\sin^2(\pi/N)} \tag{20}$$

$$= 2\frac{\sin(\pi/N)}{1-2\cos(\pi/N)+\cos^2(\pi/N)+\sin^2(\pi/N)} \tag{21}$$

$$= \frac{\sin(\pi/N)}{1-\cos(\pi/N)}. \tag{22}$$

Aqui, vamos fazer algumas manipulações algébricas. Utilizando a relação fundamental da trigonometria e o cosseno do arco duplo, podemos reescrever $1-\cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$. Podemos substituir também o seno do numerador utilizando seno do arco duplo para $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \frac{2\sin(\pi/2N)\cos(\pi/2N)}{2\sin^2(\pi/2N)} \tag{23}$$

$$= \frac{\cos(\pi/2N)}{\sin(\pi/2N)} \tag{24}$$

$$\mathbf{F} = -\hat{z}BI\frac{\pi R}{N}\frac{\cos(\pi/2N)}{\sin(\pi/2N)}. \tag{25}$$

Ao fazermos $N \to \infty$, o ângulo do seno e do cosseno se torna pequeno. Expandindo em potências de (1/N), temos

$$\mathbf{F} \approx -\hat{z}BI\frac{\pi R}{N}\left(\frac{1-\pi^2/8N^2}{\pi/2N}\right) \tag{26}$$

$$= -\hat{z}BI\frac{\pi R}{N}\left(\frac{2N}{\pi}-\frac{\pi}{2N}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \tag{27}$$

$$= -\hat{z}BIR\left(2-\frac{\pi^2}{2N^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right). \tag{28}$$

Ao tomar o limite de $N \to \infty$, qualquer termo com ordem $\mathcal{O}(1/N)$ ou maior desaparece, restando apenas

$$\mathbf{F} = -\hat{z}2BIR. \tag{29}$$

De maneira bem mais veloz, poderíamos ter substituído $\pi/N = d\alpha$, de modo que $\pi j/N = \alpha$, e ao tomarmos o limite, transformar a soma de Riemann em uma integral:

$$\mathbf{F} = -\hat{z}BIR\int_0^{\pi} \mathrm{d}\alpha \sin\alpha \tag{30}$$

$$= \hat{z}BIR\cos\alpha\Big|_0^{\pi} \tag{31}$$

$$= -\hat{z}2BIR. \tag{32}$$

Questão 4

Calcule o torque que o campo magnético exerce sobre o semicírculo da questão 1, em relação ao centro do semicírculo. *Sugestão: calcule o torque sobre cada segmento do fio e some os resultados.*

O torque pode ser escrito como

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{r}_j \times \mathrm{d}\mathbf{F}_j \tag{33}$$

$$= -BI\frac{\pi R}{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\left[R\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x}+R\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{y}\right]\times\hat{z} \tag{34}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{N}\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\left[-\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{y}+\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x}\right] \tag{35}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{N}\left[-\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{y}+\sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x}\right] \tag{36}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{N}\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\hat{y}+\sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x}\right]. \tag{37}$$

Temos duas somas para analisar: a do seno e a do seno quadrado. Refazendo agora para um arco duplo,

$$\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \mathrm{Im}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(e^{i2\pi/N}\right)^j\right] \tag{38}$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i2\pi/N}}\right] \tag{39}$$

$$= 0, \tag{40}$$

pois o numerador tem um $e^{i2\pi} = 1$. A soma do seno quadrado, no entanto, dá diferente de zero. Vamos expandir o seno utilizando $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

$$\sum_{j=1}^{N} \sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \frac{1}{2i}\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{N}(e^{i\pi j/N} - e^{-i\pi j/N})(e^{i\pi j/N} - e^{-i\pi j/N}) \tag{41}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(e^{i2\pi j/N} - 2 + e^{-i2\pi j/N}) \tag{42}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(e^{i2\pi/N}\right)^j - \sum_{j=1}^{N} 2 + \sum_{j=1}^{N}\left(e^{-i2\pi/N}\right)^j\right] \tag{43}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i2\pi/N}} - 2N + \frac{1 - e^{-i2\pi}}{1 - e^{-i2\pi/N}}\right). \tag{44}$$

O primeiro e o terceiro termo da soma na equação 44 se anulam pois $e^{\pm i2\pi} = 1$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{N} \sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \frac{N}{2}. \tag{45}$$

Então,

$$\boldsymbol{\tau} = -BI\frac{\pi R^2}{N}\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\hat{y} + \sum_{j=1}^{N}\sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\hat{x}\right] \tag{46}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{N}\frac{N}{2}\hat{x} \tag{47}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{2}\hat{x}. \tag{48}$$

Veja que podemos considerar o momento magnético da espira como $\boldsymbol{\mu} = IA\hat{z} = \hat{z}I\pi R^2/2$, o que faz com que

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \tag{49}$$

como esperado.

Similarmente ao exercício 3, ao invés de resolver a soma de Riemann, poderíamos transformar o torque na integral

$$\boldsymbol{\tau} = -BIR^2\int_0^{\pi}\left(-\hat{y}\sin\alpha\cos\alpha \mathrm{d}\alpha + \hat{x}\sin^2\alpha \mathrm{d}\alpha\right) \tag{50}$$

A primeira integral pode ser calculada substituindo $\cos\alpha = u$, tal que $\mathrm{d}u = -\sin\alpha \mathrm{d}\alpha$. A segunda integral pode ser modificada utilizando, a relação fundamental da trigonometria e o cosseno do arco duplo, de forma que se transforme em $(1 - \cos(2\alpha))/2$. Substituindo na equação 50, temos

$$\boldsymbol{\tau} = -BIR^2\left[\hat{y}\int_1^{-1} u du + \frac{\hat{x}}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos(2\alpha))d\alpha\right] \tag{51}$$

$$= -BIR^2\left[\hat{y}\frac{u^2}{2}\bigg|_1^{-1} + \hat{x}\frac{\alpha}{2}\bigg|_0^{\pi} - \frac{\hat{x}}{4}\sin 2\alpha\bigg|_0^{\pi}\right] \tag{52}$$

$$= -BI\frac{\pi R^2}{2}\hat{x}. \tag{53}$$

Questão 5

Calcule, da forma mais simples que imaginar, a força e o torque que o campo magnético exerce sobre a espira na figura 2. Compare os resultados com os das questões 3 e 4.

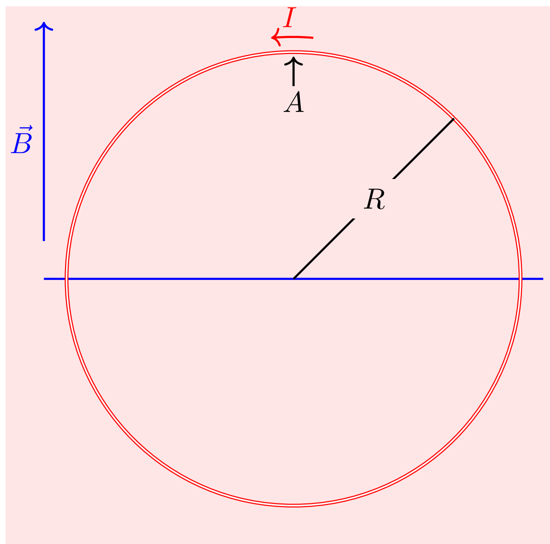


Figura 2: Questões 5-8.

Vamos considerar a origem do sistema de coordenadas no centro da espira, de forma que o eixo $\hat{x}$ passa sobre a linha azul, o campo magnético está no eixo $\hat{y}$ e $\hat{z}$ sai da folha. A força pode ser facilmente encontrada utilizando a força de Lorentz para algum elemento $\mathrm{d}\theta$ e integrando sobre θ. O elemento de caminho é $\mathrm{d}\mathbf{l} = R\mathrm{d}\theta\hat{\theta}$, com $\hat{\theta}$ identificado na questão 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{F} &= I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} && (54)\\
&= BIR\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) \times \hat{y} && (55)\\
&= -BIR\mathrm{d}\theta\sin\theta\hat{z} && (56)\\
\mathbf{F} &= -\hat{z}BIR\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta && (57)\\
&= \hat{z}BIR\cos\theta\Big|_0^{2\pi} && (58)\\
&= 0. && (59)
\end{aligned}$$

Ou seja, a força líquida sobre o corpo é nula. Para calcular o torque, podemos utilizar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} && (60)\\
&= \pi R^2 IB\hat{z} \times \hat{y} && (61)\\
&= -\hat{x}\pi R^2 BI. && (62)
\end{aligned}$$

Questão 6

Suponha que a espira da figura 2 possa girar livremente em torno do eixo horizontal indicado pela linha azul. Calcule a energia da espira em função do ângulo que ela forma com o plano da figura.

A energia que a espira tem pode ser calculada como

$$\mathrm{d}U = -\boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, \tag{63}$$

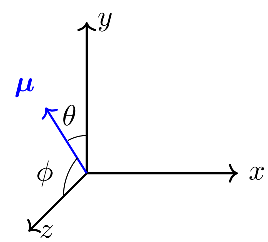
tal que θ é o ângulo que o *momentum* magnético faz com o campo $\mathbf{B}$, e sua direção aponta no eixo de giro, mostrando segundo a regra da mão direita o sentido de rotação. Uma vez que $\mathrm{d}U$ é um escalar, podemos calcular apenas o módulo, ficando com $\mathrm{d}U = \mu B \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Então

$$\mathrm{d}U = \pi R^2 I B \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{64}$$

$$U = \pi R^2 I B \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \tag{65}$$

$$= -\pi R^2 I B \cos\theta. \tag{66}$$

Contudo, o ângulo que ela forma com o plano da figura não é θ (que é o ângulo entre o momento magnético e o campo magnético), mas sim $\pi/2 - \theta$. Assim,

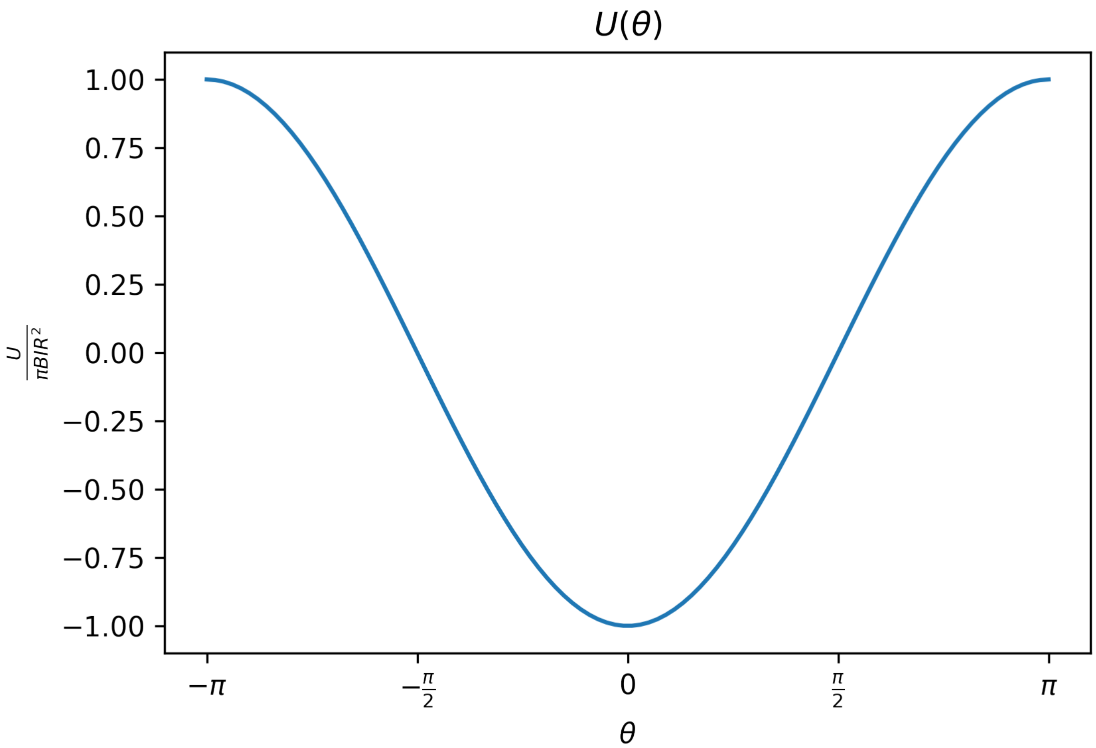


$$U = -\pi R^2 I B \sin\phi. \tag{67}$$

Questão 7

Suponha agora que o eixo azul na figura 2 está sujeito a um pouco de atrito. Abandonado na posição que a figura mostra, a espira roda, mas aos poucos perde energia até parar. Quando ela parar, em que posição estará o ponto mais alto da circunferência, chamado de A na figura? Para indicar a posição, escreva a distância, como um múltiplo de R, e diga se ele vai ficar abaixo ou acima do plano da figura ($0.7R$ abaixo do plano, por exemplo).

No caso em que temos atrito, mas o campo magnético não cessa, a espira só para de fato em uma posição que ela não esteja sofrendo torque. Para que isso seja verdade, precisamos que $\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{B}$. Ou seja, a espira fica parada quando A exatamente no plano xz. Contudo, considere a energia: a energia potencial magnética em $\theta = 0$ é $U = 0$, mas em $\theta = \pi$, $U = \pi R^2 I B > 0$. Assim, a espira busca a posição de menos energia, o que implica que a posição de A está a R abaixo do plano da figura, $A = -R\hat{z}$.



Questão 8

Ao olhar para a figura 2, você está vendo o polo Norte ou Sul da espira? Justifique sua resposta.

Vemos seu polo Norte utilizando a regra da mão direita.

Questão 9

O fio fino da figura 3 conduz uma corrente $1A$. Mostre, num desenho, as linhas de campo magnético e calcule o campo magnético que a corrente produz a $1cm$ de distância do fio.

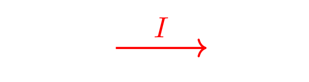
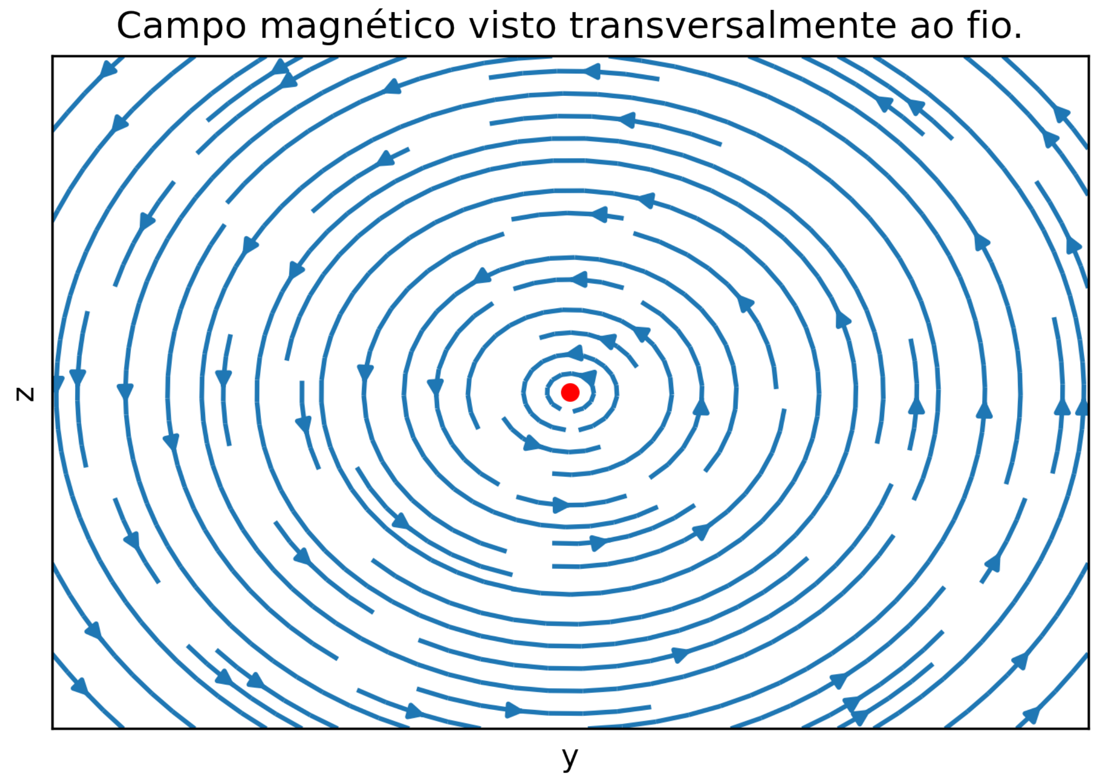
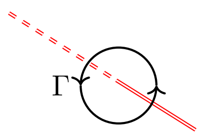


Figura 3: Questão 9.

Se definirmos o fio como sendo inteiramente em x, e com seu centro em $x = 0$, as linhas de campo no plano yz são



Para calcular o campo magnético a uma distância ρ do eixo do fio, podemos lançar mão da simetria e envolver o fio em um caminho circular, tal que $\mathrm{d}\mathbf{l} = \rho \mathrm{d}\phi\hat{\phi}$, como mostra a figura abaixo.



Podemos usar então a Lei de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I. \tag{68}$$

Por argumentos de simetria, tiramos o campo magnético da integral, e nos resta integrar o caminho sobre a curva Γ, que resulta em seu cumprimento; o caminho segue sobre $\hat{\phi}$. Assim,

$$\mathbf{B} 2\pi\rho = \mu_0 I \hat{\phi} \tag{69}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi}. \tag{70}$$

Substituindo $\rho = 1cm = 10^{-2}m$, $I = 1A$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, chegamos em

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi 10^{-2}} T \tag{71}$$

$$= 2 \cdot 10^{-5} T. \tag{72}$$

Questão 10

Os dois fios da figura 4 conduzem corrente de $1A$ no mesmo sentido. Eles têm $1m$ de comprimento e estão separados por $1cm$. Calcule a força entre os fios. Eles se atraem ou se repelem? *Sugestão: aproveite o resultado da questão 9.*

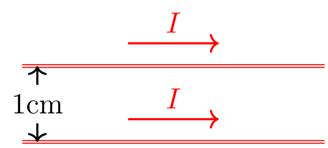
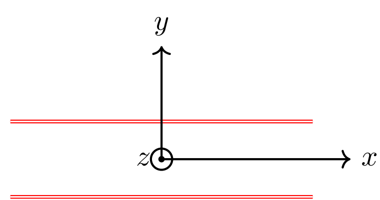


Figura 4: Questão 10.

Vamos colocar a origem do sistema de coordenadas equidistante aos dois fios e às suas extremidades: Assim, podemos reescrever o campo que o fio de baixo faz sobre o fio de cima como



$\mathbf{B} = \hat{z}\mu_0 I/2\pi\rho$. A força que o fio de baixo exerce sobre o fio de cima pode ser obtida integrando a força de Lorentz

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \tag{73}$$

tal que $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}x\hat{x}$, e integramos de $-L/2$ a $L/2$.

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho} dx\hat{x} \times \hat{z} \tag{74}$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho} dx\hat{y} \tag{75}$$

$$\mathbf{F} = -\hat{y}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho}\int_{-L/2}^{L/2} dx \tag{76}$$

$$= -\hat{y}\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi\rho}. \tag{77}$$

Essa força aponta na direção $-\hat{y}$. Como a corrente nos fios tem o mesmo sentido, o campo magnético que o fio de cima gera sobre o fio de baixo entra no plano, tendo sentido $-\hat{z}$. Com isso, o sinal da força que o fio de cima exerce sobre o de baixo é oposto, e a força aponta para cima. Desta forma, os fios se atraem.

O módulo da força que os fios fazem um no outro é

$$F = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi\rho} \tag{78}$$

$$= 2 \cdot 10^{-5} N. \tag{79}$$