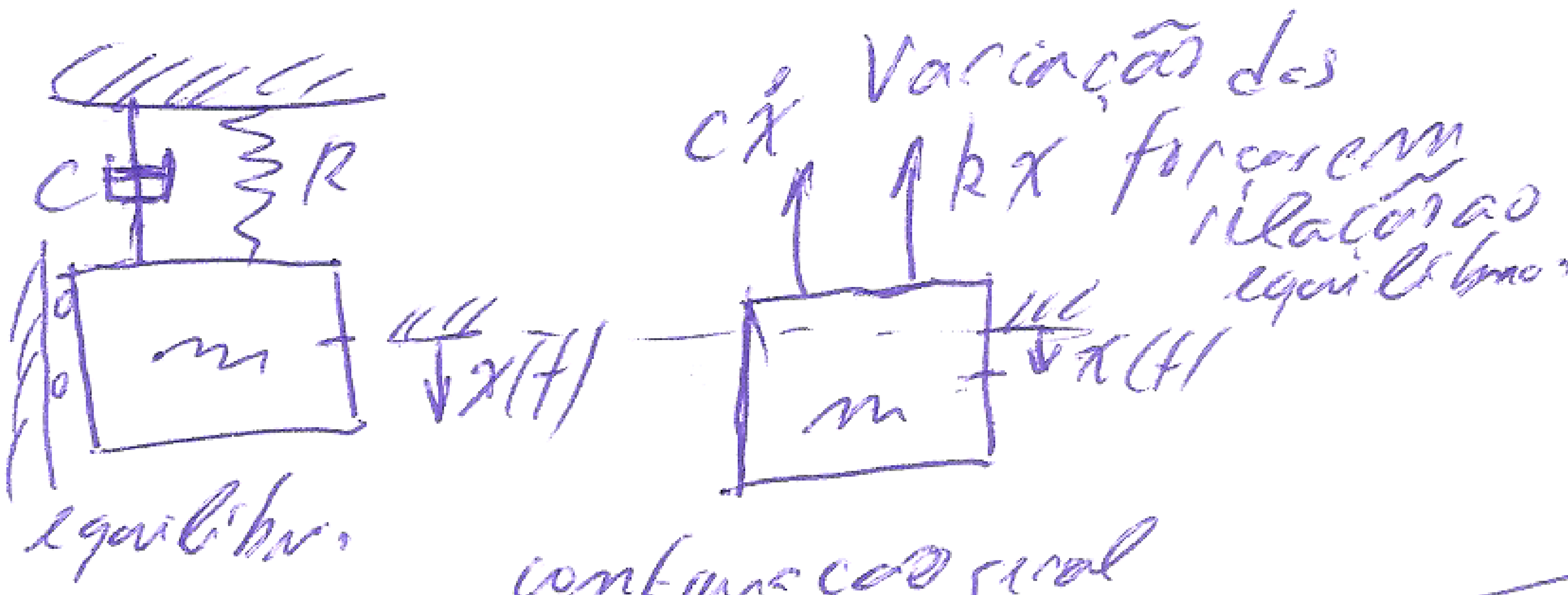


TMB $\Rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t)}$

válido para x qualquer, $\dot{x}$ qualquer e $\ddot{x}$ qualquer

Se integrarmos a Equ. Dif. obtemos a solução para qualquer tempo a partir das condições iniciais.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$x(t) = A e^{st} \ (?)$$

$$ms^2 A e^{st} + csAe^{st} + kAe^{st} = 0$$

$$(ms^2 + cs + k) \cdot Ae^{st} = 0$$

como Ae^{st} não queremos como $\underline{0}$

$$ms^2 + cs + k = 0 \therefore$$

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{mas } \frac{k}{m} = \omega^2$$

frequência natural angular do sistema não amortecido.

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{k/m} \quad \text{ou} \quad c_c = 2\sqrt{km}$$

Coeficiente de amortecimento crítico $c_c \rightarrow$
$\rightarrow$ mudança de comportamento das raízes solução.

Definimos $\zeta = \dfrac{c}{c_c}$ (fator de amortecimento do sistema)

As raízes $s_{1,2}$ podem ser reais ou complexas mas sempre têm parte real negativa se k, m e $c > 0$

As soluções possíveis da Equ. Dif.

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ x_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases} \quad \text{onde } s_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\cdot\omega$$

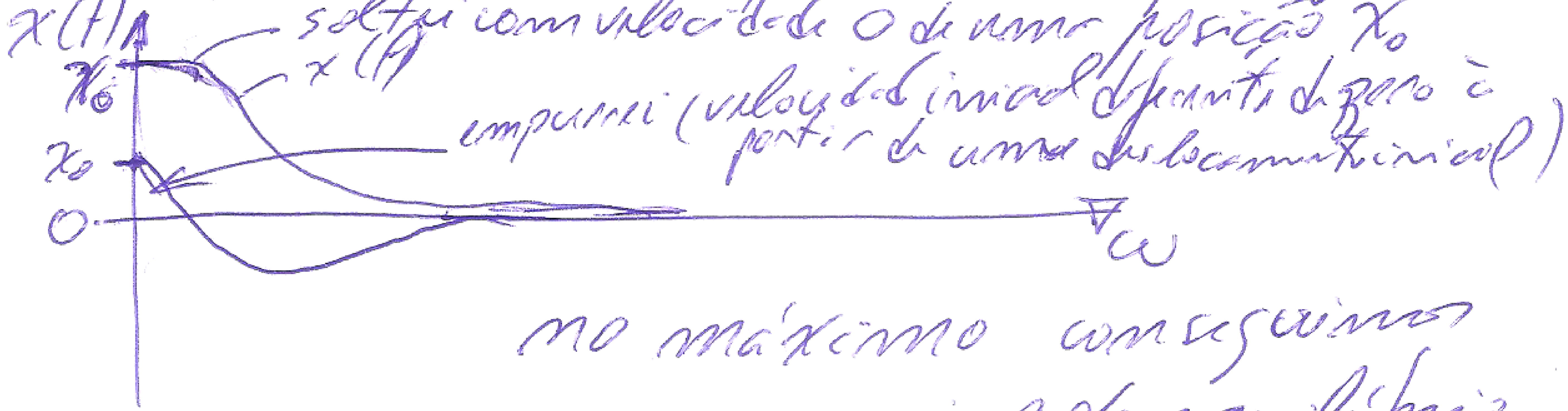
se $\xi > 1$ as raízes são reais (amortecimento supercrítico)

e a solução mais geral $x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$

$$= A_1 e^{(-\xi\omega+\sqrt{\xi^2-1}\cdot\omega)t} + A_2 e^{(-\xi\omega-\sqrt{\xi^2-1}\cdot\omega)\cdot t} = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

com α e β reais positivos

Solução nesse caso pode ser algo como



no máximo conseguimos cruzar a posição de equilíbrio uma vez

Se $\xi < 1$ (amortecimento subcrítico)

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{1-\xi^2}\cdot i\cdot\omega \quad \text{(complexos)}$$

$$x(t) = A_1 e^{(-\xi\omega + i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega)t} + A_2 e^{(-\xi\omega - i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega)t} =$$

$$= e^{-\xi\omega t}\cdot\left[A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right] \quad \text{com } \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

usando a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\cdot\left[A_1\cos(\omega_d t) + A_1 i\,\text{sen}(\omega_d t) + A_2\cos(\omega_d t) - A_2 i\,\text{sen}(\omega_d t)\right] =$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\cdot\left[(A_1+A_2)\cos(\omega_d t) + (A_1 - A_2)\, i\,\text{sen}(\omega_d t)\right]$$

Como estamos buscando solução real p/ o problema

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\cdot\left[\underbrace{B}_{Real}\cdot\cos(\omega_d t) + \underbrace{A}_{Real}\,\text{sen}(\omega_d t)\right]$$

$\boxed{A_1 \text{ e } A_2 \text{ são complexos conjugados}}$

Poderíamos escrever também

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \cdot X \cdot sen(\omega_d t + \phi) \quad \text{pois}$$

$$= e^{-\zeta\omega t} \cdot [X \cos\phi \cdot sen(\omega_d t) + X sen\phi \cdot \cos(\omega_d t)] \quad \text{e}$$

$$X sen\phi = A \quad \text{e} \quad X\cos\phi = B \quad \therefore$$

$$tg\phi = \frac{A}{B} \quad \text{e} \quad X^2 sen^2\phi + X^2\cos^2\phi = A^2 + B^2$$

$$X^2 = A^2 + B^2 \quad \therefore \quad X = \pm\sqrt{A^2+B^2}$$

Observar o sinal: se escolher um valor positivo para X deve escolher o ângulo ϕ que satisfaça também (p.ex.) $X sen\phi = A$ com os sinais correspondentes.

Conforme as condições iniciais p/ $t=0$ $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$

e os valores de ω e ζ podemos obter grande variedade de soluções

Sendo $x(t) = e^{-\zeta\omega t} \cdot [A\, sen(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)]$

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega \cdot e^{-\zeta\omega t}[A\, sen(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)] +$$

$$+ e^{-\zeta\omega t} \cdot [A\omega_d \cos(\omega_d t) - B\omega_d\, sen(\omega_d t)]$$

Aplicando as C.I. (condições iniciais) obtemos:

$\hookrightarrow \left.\begin{matrix} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{matrix}\right\}$ Recordando

$$x(0) = B = x_0$$

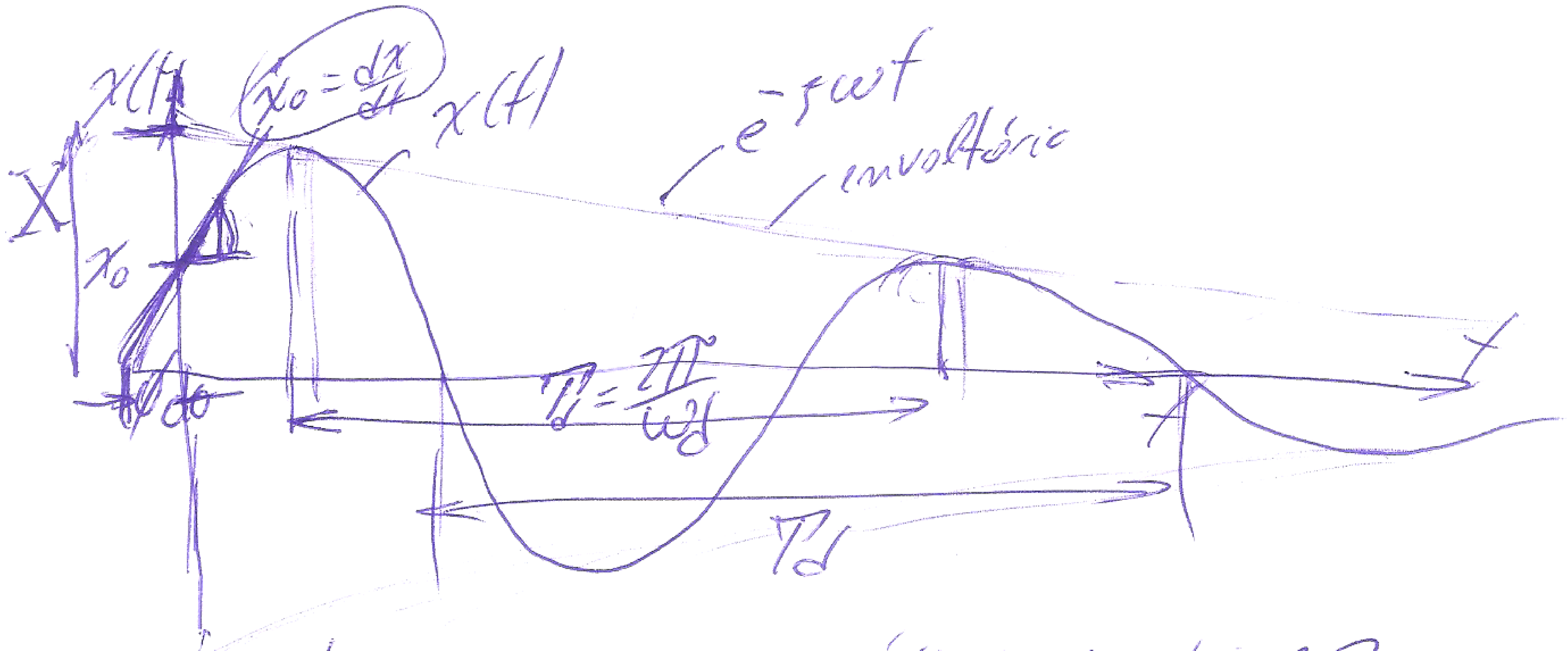
$$\dot{x}(0) = -\zeta\omega \cdot B + A\cdot\omega_d = -\zeta\omega \cdot x_0 + A\cdot\omega_d = \dot{x}_0$$

$$\boxed{B = x_0} \quad \text{e} \quad \boxed{A = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_d}}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \cdot \left[\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_d} \cdot sen(\omega_d t) + x_0\cos(\omega_d t)\right] \quad \text{ou}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \cdot X\, sen(\omega_d t + \phi) \quad \text{com} \quad X = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_d}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\text{e} \quad tg\,\phi = \frac{x_0 \cdot \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}$$



observamos que os máximos e mínimos não ocorrem exatamente para $\omega_d t + \phi = \pm \pi/2 + n\pi$, mas um pouco antes. O ponto de tangência na envoltória é a $\pi/2 + n\pi$. A frequência de oscilação ω_d varia conforme o amortecimento $\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$

grandezas finitas X
grandezas inertes.

Decremento Logarítmico

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

$$x_j(t_j) = X e^{-\zeta\omega t_j} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d t_j + \phi)$$

$$x_{j+1}\left(t_j + \frac{2\pi}{\omega_d}\right) = X e^{-\zeta\omega\left(t_j + \frac{2\pi}{\omega_d}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\omega_d\left(t_j + \frac{2\pi}{\omega_d}\right) + \phi\right)$$

$$\frac{x_j}{x_{j+1}} = \frac{e^{-\zeta\omega t_j}}{e^{-\zeta\omega\left(t_j + 2\pi/\omega_d\right)}} = e^{\zeta \cdot \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega_d}} = e^{\left(\zeta \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{x_j}{x_{j+1}}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$ decremento logarítmico

Se $\zeta \ll 1$

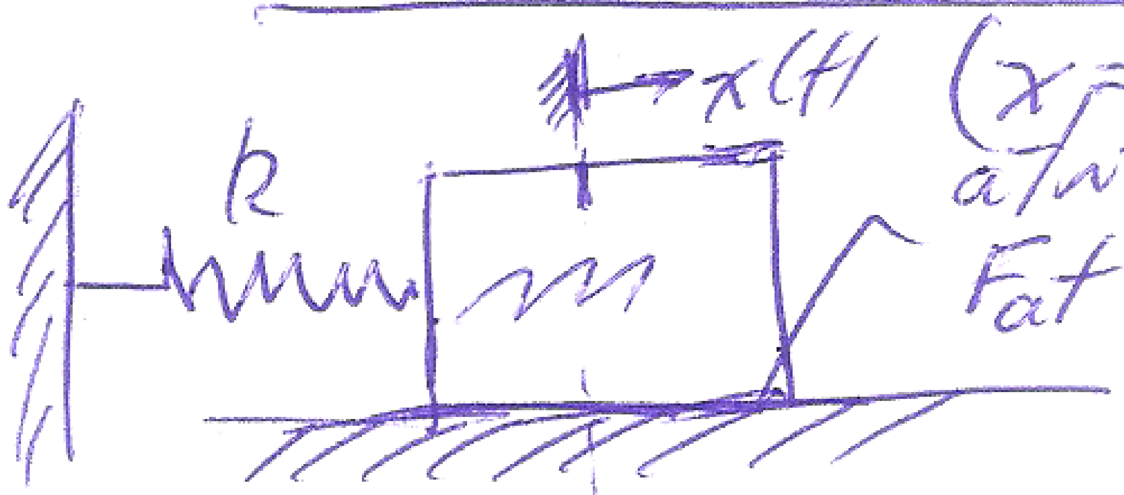
$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{x_j}{x_{j+1}}\right) \simeq 2\pi\zeta}$$

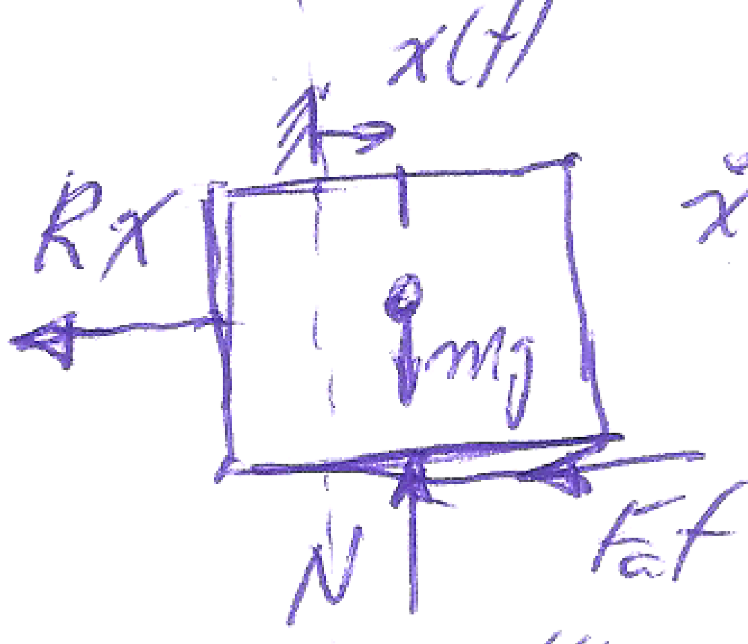
Na prática contamos vários ciclos, para melhorar a precisão de leitura

$$\ln\left(\frac{x_j}{x_{j+m}}\right) = \ln\left(\frac{x_j}{x_{j+1}} \frac{x_{j+1}}{x_{j+2}} \cdots \frac{x_{j+m-1}}{x_{j+m}}\right) = m \cdot \delta$$

$$\delta = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{x_j}{x_{j+m}}\right)$$

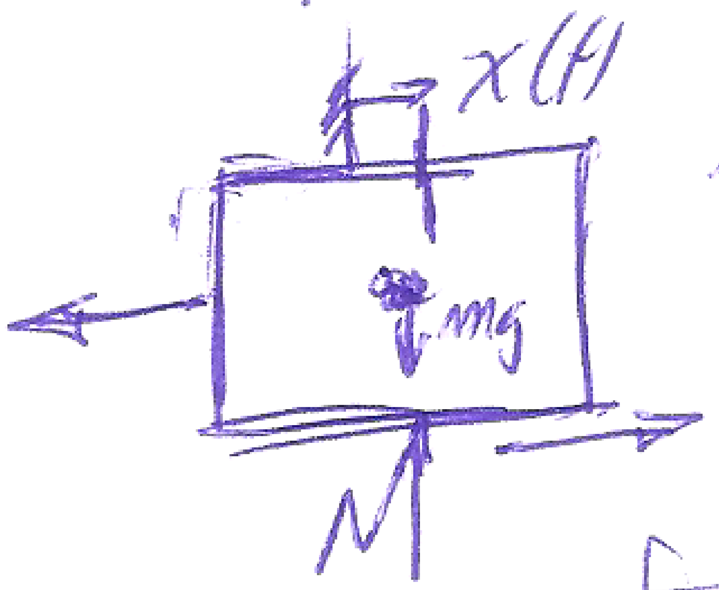
Vibrações livres com atrito seco





$\dot{x}(t) > 0$

$m \cdot \ddot{x}(t) = -kx(t) - Fat$



$\dot{x}(t) < 0$

$m\ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) + Fat$

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = -Fat \cdot \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}}$$

Vamos resolver as equações diferenciais nas condições em que são válidas.

C.I. $x(0) = x_0 > Fat/k$ (para começar a se deslocar)

$\dot{x}(0) = 0$

vai sair com $\dot{x} < 0 \therefore m\ddot{x}(t) + kx(t) = Fat$

$x_h(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$x_p(t) = Fat/k$

$x(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t) + Fat/k$

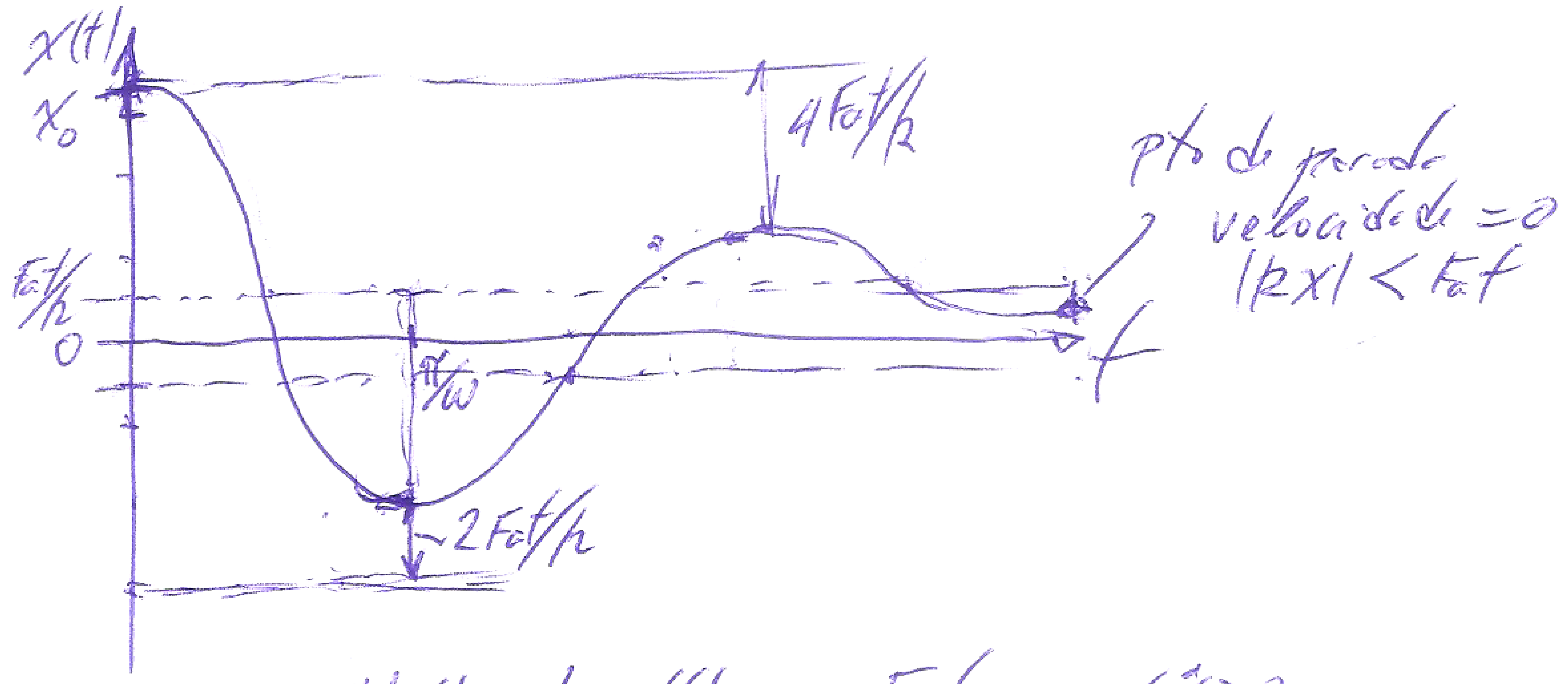
$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\,sen(\omega t)$

C.I. $\begin{cases} x(0) = x_0 = B + Fat/k \therefore B = x_0 - Fat/k \\ \dot{x}(0) = 0 = A\omega \therefore A = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = (x_0 - Fat/k) \cdot \cos(\omega t) + Fat/k \\ \dot{x}(t) = -(x_0 - Fat/k) \cdot \omega\,sen(\omega t) \end{cases}$ p/ $(\dot{x} < 0)$ $\therefore (0 \leq t \leq \pi/\omega)$

$x(\pi/\omega) = -x_0 + 2Fat/k$

$\dot{x}(\pi/\omega) = 0$



$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = -Fat \quad p/\ \dot{x} > 0$$

$$x_h(t) = A'\,sen(\omega t) + B'\cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = -\frac{Fat}{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A'\,sen(\omega t) + B'\cos(\omega t) - \frac{Fat}{k} \\ \dot{x}(t) &= A'\omega\cos(\omega t) - B'\omega\,sen(\omega t) \end{aligned}\right\} p/\ \dot{x} < 0$$

$$C.I.\ \begin{cases} x(\pi/\omega) = -x_0 + \frac{2Fat}{k} \\ \dot{x}(\pi/\omega) = 0 \end{cases}$$

$$x(\pi/\omega) = -x_0 + \frac{2Fat}{k} = -B' - \frac{Fat}{k} \quad \therefore \boxed{B' = x_0 - \frac{3Fat}{k}}$$

$$\dot{x}(\pi/\omega) = 0 = A'\omega \quad \therefore \boxed{A' = 0}$$

∴ em cada meio ciclo a ~~motti~~ amplitude diminui $\left(\frac{2Fat}{k}\right)$

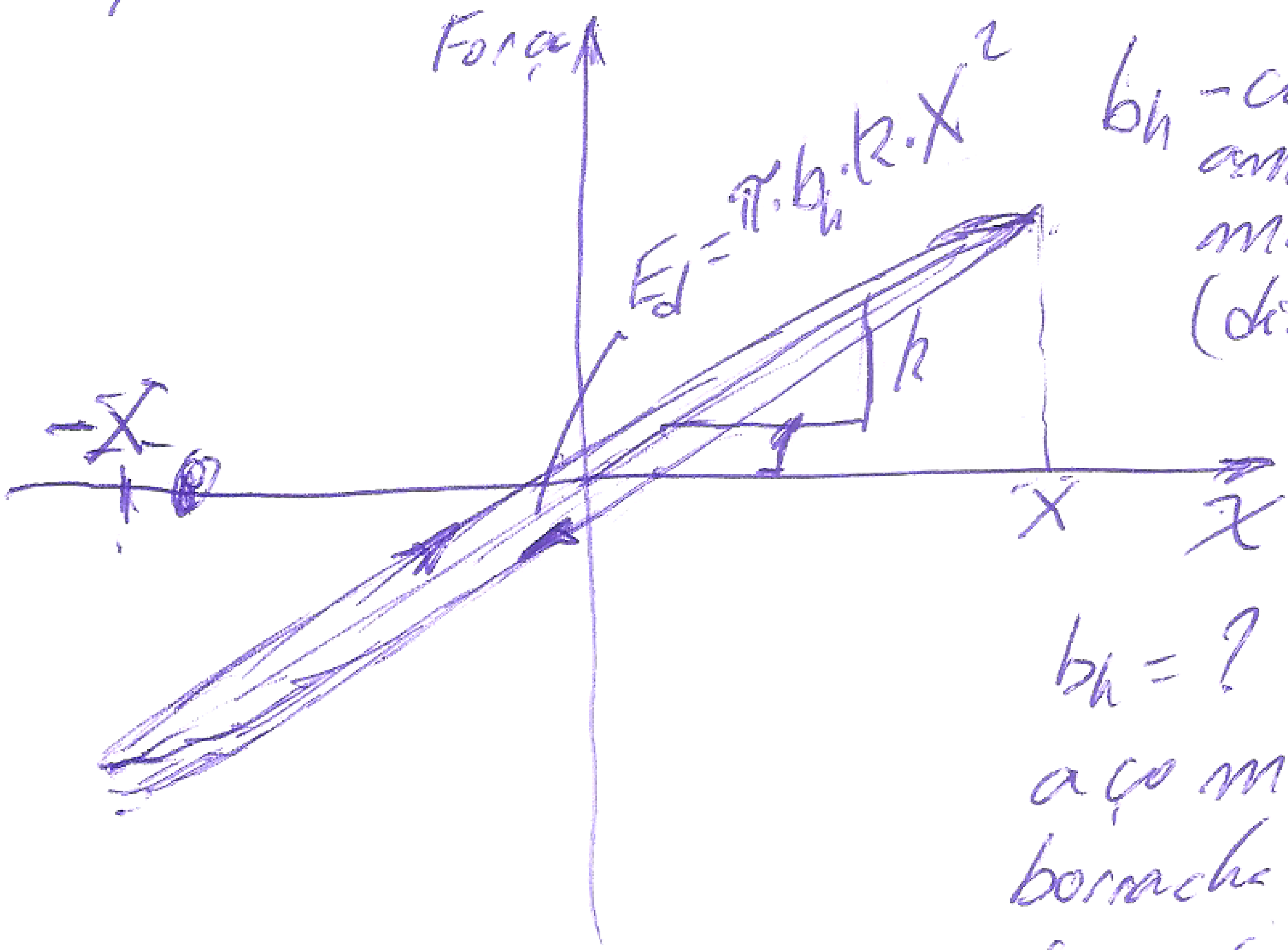
Observar que a frequência de oscilação não depende do amortecimento.

Relógios mecânicos (de pêndulo ou balancim) só operavam com atrito seco para que não fossem afetados pela mudanças de viscosidade dos lubrificantes.

Observar o número inteiro de $\frac{1}{2}$ ciclos até a parada. ✗ O tempo "infinito" do sistema c/ amortecimento viscoso.

Amortecimento por histerese no material

Qualquer elemento "elástico" real



b_h - constante de amortecimento do material (coef. de histerese) (dissipação estrutural)

$b_h = ?$

aço mola $b_h = 10^{-4}$

borracha de coxim $\rightarrow b_h = 0{,}1$

ferro fundido $b_h = 0{,}02$

O ~~coef.~~ expoente 2 no X varia em torno de 2, que adotamos por simplicidade.

Em geral $E_d << \frac{1}{2} k X^2 \therefore$

Em um ciclo, partindo de uma amplitude X_j

$$\left.\begin{aligned} E_{p_j} &= \frac{1}{2} k X_j^2 \\ E_{p_{j+0,5}} &= \frac{1}{2} k X_{j+0,5}^2 \end{aligned}\right\} E_d = \frac{\pi b_h k X_j^2}{4} + \frac{\pi b_h k X_{j+0,5}^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} k X_j^2 - \frac{\pi b_h k}{4}\left(X_j^2 + X_{j+0,5}^2\right) = \frac{1}{2} k X_{j+0,5}^2$$

$$X_j^2\left(1 - \frac{\pi b_h}{2}\right) = X_{j+0,5}^2\left(1 + \frac{\pi b_h}{2}\right) \therefore \frac{X_j}{X_{j+0,5}} = \sqrt{\frac{2+\pi b_h}{2-\pi b_h}}$$

$$\frac{X_{j+0,5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2+\pi b_h}{2-\pi b_h}} \therefore \frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2+\pi b_h}{2-\pi b_h}$$

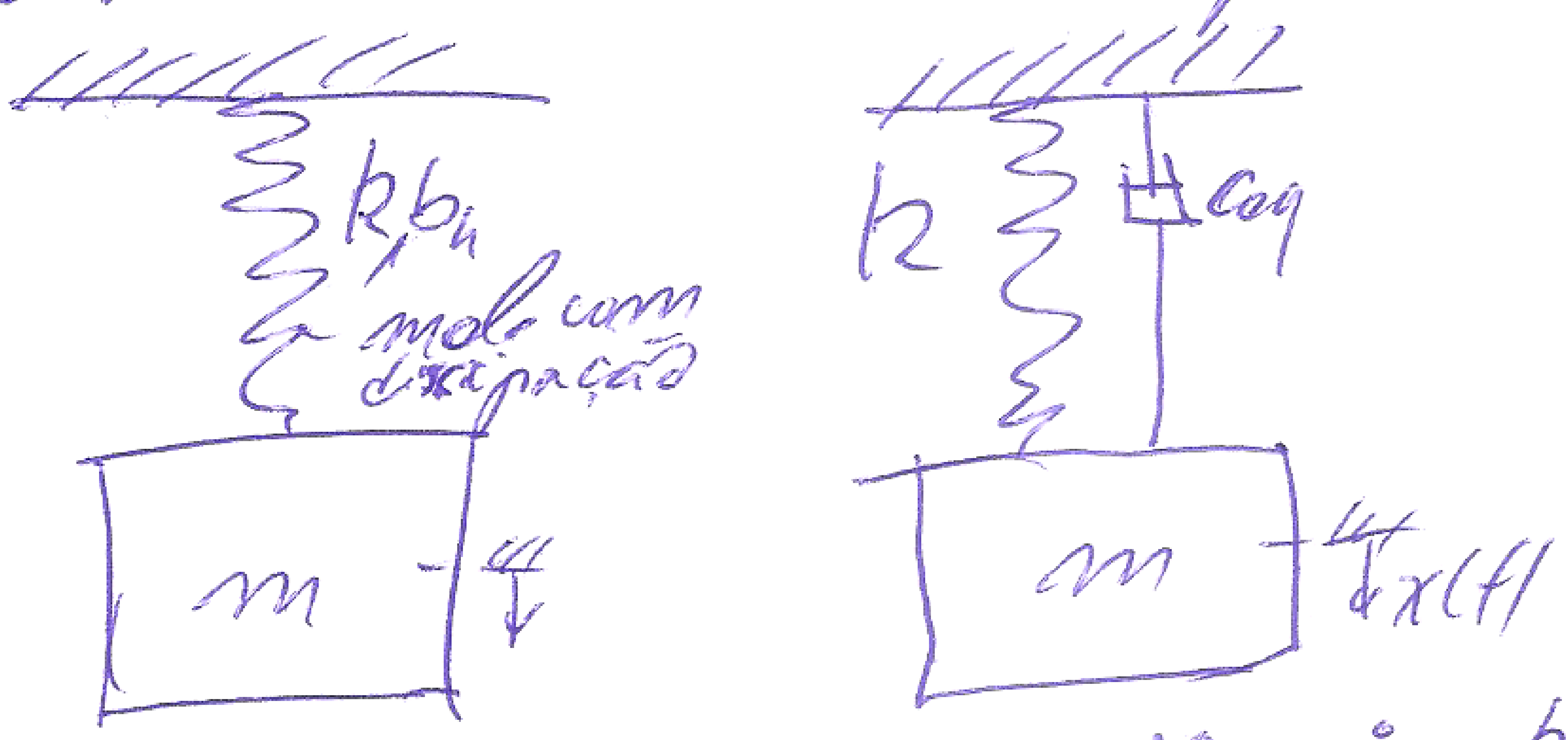
$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln\left(\frac{1+\pi b_h/2}{1-\pi b_h/2}\right)$$

Mas $\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$ e $\frac{1}{1-\varepsilon} \sim 1+\varepsilon$ e $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon) \simeq 1+2\varepsilon$

$$\therefore \delta = \ln\left(\frac{1+\pi b_h/2}{1-\pi b_h/2}\right) \sim \ln(1+\pi b_h) \simeq \pi b_h$$

Mas $\delta \simeq 2\pi \xi_{eq}$ $\therefore$ $\boxed{\xi_{eq} \simeq \frac{b_h}{2}}$

Resumindo amortecimento por histerese no material



$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = 0$$

$$\zeta_{eq} = \frac{b_h}{2}$$

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{km}} = \frac{b_h}{2} \therefore \boxed{c_{eq} = b_h\sqrt{km} = \frac{b_h k}{\omega}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{b_h}{2}\omega t} X \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \qquad \omega_d = \omega\sqrt{1-\cancel{\left(\frac{b_h}{2}\right)^2}}$$

$\cancel{\left(\frac{b_h}{2}\right)^2} \to 0$

$$\boxed{\omega_d \cong \omega}$$