MAT0130 - Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Professor Antonio Luiz Pereira

Susana Hayashi Alonso - 10170823

Lista 2 (04/06/2020)

① a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

Tome a homogênea associada $y'' - y' - 2y = 0$. A equação característica será $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, onde $\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9$. Portanto, são raízes da equação $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ e $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ e temos como soluções L.I. da homogênea $y_1(x) = e^{\alpha_1 x} = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{\alpha_2 x} = e^{-x}$.

Vamos agora tentar encontrar solução particular da E.D.O., da forma $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Note que $y'' - y' - 2y = 2b_2 - (b_1 + 2b_2 x) - 2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) =$
$= (2b_2 - b_1 - 2b_0) + (-2b_2 - 2b_1)x + (-2b_2)x^2 = 4x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_2 - b_1 - 2b_0 = 0 \\ -2b_2 - 2b_1 = 0 \\ -2b_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 4/(-2) = -2 \\ b_1 = \frac{+2b_2}{-2} = -b_2 = 2 \\ b_0 = \frac{b_1 - 2b_2}{-2} = \frac{2+4}{-2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Daí, uma solução particular da E.D.O. é $y = -3 + 2x + (-2)x^2$.

Portanto, a solução geral será $y_h = -3 + 2x - 2x^2 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

b) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Vamos tentar encontrar uma solução particular da E.D.O., da forma $y = Ae^{3x}$. Note que $y'' - y' - 2y = A3^2 e^{3x} - A3e^{3x} - 2Ae^{3x} = A(3^2 - 3 - 2)e^{3x} =$
$= A(9-5)e^{3x} = 4Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Daí, uma solução particular da E.D.O. é $y = \frac{1}{4}e^{3x}$ e a solução geral é $y_h = \frac{1}{4}e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ (note que a homogênea associada é igual à do item a), indicando que podemos usar as mesmas soluções L.I. encontradas no item a)).

c) $y'' - y' - 2y = \text{sen}\,2x$

Vamos tentar encontrar uma solução particular da E.D.O., da forma $y = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$. Note que $y'' - y' - 2y = -A.4.\text{sen}\,2x - A.2.\cos 2x - 2A\,\text{sen}\,2x +$ $(-4B\cos 2x) - (-B.2.\text{sen}\,2x) - 2B\cos 2x = (-4A - 2A + 2B)\,\text{sen}\,2x + (-2A - 4B - 2B)\cos 2x =$ $= \text{sen}\,2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6A + 2B = 1 \\ -2A - 6B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = +\frac{1}{20} \\ A = \frac{6}{16} \cdot \frac{1}{(-2)} = -\frac{3}{20} \end{cases}$$

Daí, uma solução particular da E.D.O. é $y = -\frac{3}{20}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{20}\cos 2x$ e a solução geral é $y_h = -\frac{3}{20}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{20}\cos 2x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ (note que a homogênea associada é igual à do item a), indicando que podemos usar as mesmas soluções L.I. encontradas no item a))

d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

Vamos tentar encontrar uma solução particular da E.D.O., da forma $y = (Ax + B)e^{-x}$. Note que $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x} -$ $- 6(Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x}) + 11(-Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} + Be^{-x}) =$ $= (-A - 6A - 11A - 6A)xe^{-x} + (3A - B + 12A - 6B + 11A - 11B - 6B)e^{-x} = -24Axe^{-x} +$ $(26A - 24B)e^{-x} = 2xe^{-x} + 0.e^{-x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -24A = 2 \\ 26A - 24B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{12} \\ B = \frac{26}{24}A = \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{13}{144} \end{cases}$$

Daí, uma solução particular da E.D.O. é $y = \left(-\frac{1}{12}x + \frac{13}{144}\right)e^{-x}$

Vamos encontrar agora ~~duas~~ três soluções L.I. da homogênea associada $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Neste caso, temos como equação característica $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0$. Note que 1 é raiz dessa equação e $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) =$ $= (x-1)(x-2)(x-3)$, logo, 2 e 3 também são raízes. Daí, temos as soluções L.I. da homogênea $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = e^{3x}$.

Portanto, a solução geral é $y_h = \left(-\frac{1}{12}x + \frac{13}{144}\right)e^{-x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

② a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Pelo item 1a), sabemos que $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ é solução geral da homogênea associada. Vamos, agora, utilizar o método da variação dos parâmetros para determinar a solução geral. Para isso, tomamos $y_p = v_1(x) e^{2x} + v_2(x) e^{-x}$ e queremos resolver:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{3x} \cdot e^{-x}}{-e^{x} - 2e^{x}} = \frac{e^{2x}}{e^{x} + 2e^{x}} = \frac{e^{2x}}{3e^{x}} = \frac{1}{3} e^{x} \Rightarrow v_1(x) = \frac{1}{3} e^{x} + k_1$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{-e^{x} - 2e^{x}} = \frac{e^{5x}}{-3e^{x}} = -\frac{1}{3} e^{4x} \Rightarrow v_2(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} + k_2$$

Daí, $y_p = \frac{1}{3} e^{x} \cdot e^{2x} - \frac{1}{12} e^{4x} \cdot e^{-x} = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{12} e^{3x} = \left(\frac{4}{12} - \frac{1}{12}\right) e^{3x} = \frac{1}{4} e^{3x}$

Logo, obtemos como solução geral $y_h = \frac{1}{4} e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

b) $x'' + 4x = \text{sen}^2 2t$

Homogênea associada: $x'' + 4x = 0$

Eq. característica: $\alpha^2 + 4 = 0$ ($\alpha_1 = 2i$ e $\alpha_2 = -2i$ são raízes)

Admitindo soluções complexas, teríamos $z_1 = e^{\alpha_1 t} = \cos 2t + i\,\text{sen}\,2t$

$$z_2 = e^{\alpha_2 t} = \cos 2t - i\,\text{sen}\,2t$$

Pelo princípio da superposição, obtemos soluções reais (e L.I.):

$y_1 = \frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) = \cos 2t$

$y_2 = \frac{1}{2i}(z_1(t) - z_2(t)) = \text{sen}\,2t$

Daí, temos como solução geral da homogênea associada $y = c_1 \cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t$ e tomamos $y_p = v_1(t)\cos 2t + v_2(t)\,\text{sen}\,2t$ para achar a solução geral pelo método da variação dos parâmetros. Queremos, portanto, resolver:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen}\,2t \\ \text{sen}^2 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2t & \text{sen}\,2t \\ -2\,\text{sen}\,2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}} = \frac{-\text{sen}^3 2t}{2\cos^2 2t + 2\,\text{sen}^2 2t} = -\frac{1}{2}\,\text{sen}^3 2t \Rightarrow -\frac{1}{4}\left(-\cos 2t + \frac{\cos^3(2t)}{3}\right) = v_1(t)$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\,\text{sen}\,2t & \text{sen}^2 2t \end{vmatrix}}{2} = \frac{\cos 2t\,\text{sen}^2 2t}{2} \Rightarrow \frac{1}{24}\left(\text{sen}\,6t - 3\,\text{sen}(2t)\cos(4t)\right) = v_2(t)$$

Daí, $y_p = -\frac{1}{4}\left(-\cos 2t + \frac{\cos^3(2t)}{3}\right)\cdot \cos 2t + \frac{1}{24}\left(\text{sen}\,6t - 3\,\text{sen}(2t)\cos(4t)\right)\cdot \text{sen}(2t)$

e obtemos a solução geral $y = c_1 \cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t) + \frac{1}{24}\left(\text{sen}\,6t - 3\,\text{sen}(2t)\cos(4t)\right) \cdot$

$\cdot\ \text{sen}(2t) - \frac{1}{4}\left(-\cos 2t + \frac{\cos^3(2t)}{3}\right)\cdot \cos 2t$

c) $y^{(4)} = 5x$

Observe que $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ e $y_4 = x^3$ são soluções da homogênea associada, de forma que a solução geral da homogênea é dada por $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$.

Tomamos, agora, $y_p = v_1(x) + v_2(x)\, x + v_3(x)\, x^2 + v_4(x)\, x^3$ para o método da variação dos parâmetros, e queremos resolver

$$\begin{cases} 1 . v_1'(x) + x . v_2'(x) + x^2 v_3'(x) + x^3 v_4'(x) = 0 \\ 1' . v_1'(x) + x' . v_2'(x) + (x^2)' v_3'(x) + (x^3)' v_4'(x) = 0 \\ 1'' v_1'(x) + x'' . v_2'(x) + (x^2)'' v_3'(x) + (x^3)'' v_4'(x) = 0 \\ 1''' v_1'(x) + x''' v_2'(x) + (x^2)''' v_3'(x) + (x^3)''' v_4'(x) = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1'(x) + x v_2'(x) + x^2 v_3'(x) + x^3 v_4'(x) = 0 \\ v_2'(x) + 2x v_3'(x) + 3x^2 v_4'(x) = 0 \\ 2 v_3'(x) + 6x v_4'(x) = 0 \\ 6 v_4'(x) = 5x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_4'(x) = \frac{5}{6} x \Rightarrow v_4(x) = \frac{5}{12} x^2 \\ v_3'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-6x \cdot \frac{5}{6} x\right) = -\frac{1}{2} 5x^2 \Rightarrow v_3(x) = -\frac{1}{6} 5x^3 \\ v_2'(x) = -2x v_3'(x) - 3x^2 . \frac{5}{6} x = 5x^3 - \frac{5}{2} x^3 = \frac{5}{2} x^3 \Rightarrow v_2(x) = \frac{5}{8} x^4 \end{cases}$$

$v_1'(x) = -x v_2'(x) - x^2 v_3'(x) - x^3 v_4'(x) = -\frac{5}{2} x^3 . x + x^2 . \frac{1}{2} 5x^2 - x^3 . \frac{5}{6} x = -\frac{5}{2} x^4 + \frac{5}{2} x^4 - \frac{5}{6} x^4 = -\frac{5}{6} x^4$

$\Rightarrow v_1(x) = -\frac{1}{6} x^5$

Daí, uma solução particular é $y_p = -\frac{1}{6} x^5 + \frac{5}{8} x^4 . x + \left(-\frac{1}{6} . 5x^3\right) . x^2 + \frac{5}{12} x^2 . x^3 = \left(-\frac{1}{6} + \frac{5}{8} - \frac{5}{6} + \frac{5}{12}\right) x^5 =$
$= \left(-\frac{4}{24} + \frac{15}{24} - \frac{20}{24} + \frac{10}{24}\right) x^5 = \left(\frac{25}{24} - \frac{24}{24}\right) x^5 = \frac{1}{24} x^5$ e obtemos a solução geral

$y_h = \frac{1}{24} x^5 + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$

(3) Como λ escalar é autovalor $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$, basta procurar os valores de λ para os quais essa equação vale.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)-3.(-1) = \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1$$

Daí, os autovalores serão 1 e -1, além de que a equação característica é $\det(A-\lambda I)=0$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2+4.3 = \lambda^2-2\lambda+13=0$$

Daí, como $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4.13}}{2} = 1 \pm \sqrt{12}\,i$, os autovalores serão $1+\sqrt{12}\,i$ e $1-\sqrt{12}\,i$, além de que a equação característica é $\det(B-\lambda I)=0$.

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C não é matriz quadrada $n \times n$, logo, não é possível determinar um autovalor.

④ a) $W[x(t), y(t)] = \begin{vmatrix} t & 1 \\ t^2 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$

b) O Wronskiano será igual a 0 somente para $t = 0$. Logo, x e y são L.I. para qualquer intervalo em $\mathbb{R}$

c) Como x e y teriam que ter $W[x,y] \neq 0 \; \forall t$ para serem soluções L.I. de um sistema homogêneo de equações diferenciais a coeficientes contínuos, obtemos que pelo menos um coeficiente terá que ser descontínuo em $t = 0$.

d) Temos os sistemas $\begin{cases} t' = a_{11}(t).t + a_{12}(t).1 \\ 1' = a_{21}(t)\,t + a_{22}(t).1 \end{cases}$ e $\begin{cases} (t^2)' = a_{11}(t).t^2 + a_{12}(t).2t \\ (2t)' = a_{21}(t).t^2 + a_{22}(t).2t \end{cases}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = a_{11}(t).t + a_{12}(t) \\ 0 = a_{21}(t).t + a_{22}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t = a_{11}(t)\,t^2 + a_{12}(t)\,2t \\ 2 = a_{21}(t).t^2 + a_{22}(t)\,2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{①}{\begin{cases} a_{11}(t).t + a_{12}(t) = 1 \\ a_{11}(t).t^2 + a_{12}(t).2t = 2t \end{cases}} \quad e \quad \overset{②}{\begin{cases} a_{21}(t)\,t + a_{22}(t) = 0 \\ a_{21}(t)\,t^2 + a_{22}(t)\,2t = 2 \end{cases}}$$

Resolvendo ①:

$$\begin{cases} a_{11}(t)t + a_{12}(t) = 1 \iff a_{12}(t) = 1 - a_{11}(t)t \\ a_{11}(t)t^2 + a_{12}(t)2t = 2t \end{cases}$$

$$a_{11}(t)t^2 + (1 - a_{11}(t)t)2t = 2t$$

$$a_{11}(t)t^2 + 2t - a_{11}(t).2t^2 = 2t$$

$$a_{11}(t).(t^2 - 2t^2) + 2t = 2t$$

$$a_{11}(t).(-t^2) = 2t - 2t$$

$$a_{11}(t) = \frac{2t-2t}{-t^2} \text{ se } t \neq 0 \Rightarrow a_{11}(t) = 0$$

$$\cancel{a_{11}(t) = -\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} \qquad a_{12}(t) = 1 - a_{11}(t)t = 1 - 0 = 1$$

$$\cancel{a_{12}(t) = 1 - a_{11}(t)\,t = t - \frac{2t-1}{-t} = 1 + \frac{2t-1}{t} = 1 + 2 - \frac{1}{t} = 3 - \frac{1}{t}}$$

Resolvendo ②:

$$\begin{cases} a_{21}(t).t + a_{22}(t) = 0 \iff a_{22}(t) = -a_{21}(t)t \\ a_{21}(t)t^2 + a_{22}(t).2t = 2 \end{cases}$$

$$a_{21}(t)t^2 + (-a_{21}(t)t).2t = 2$$

$$a_{21}(t)t^2 - a_{21}(t).2t^2 = 2$$

$$a_{21}(t)(t^2 - 2t^2) = 2$$

$$a_{21}(t).(-t^2) = 2$$

$$a_{21}(t) = -\frac{2}{t^2} \text{ se } t \neq 0$$

$$a_{22}(t) = -a_{21}(t)t = +\frac{2}{t^2}t = \frac{2}{t}$$

Logo, obtivemos $a_{11}(t) = 0$, $a_{12}(t) = 1$, $a_{21}(t) = -\frac{2}{t^2}$ e $a_{22}(t) = \frac{2}{t}$ e, portanto, x e y são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} (z_1)' = 0.z_1 + 1.z_2 \\ (z_2)' = -\frac{2}{t^2}z_1 + \frac{2}{t}z_2 \end{cases}, \text{ onde } z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Isso está de acordo com as conclusões do item c), pois temos descontinuidade para $t = 0$