

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

vetor normal ao plano π : $\vec{n} = (a, b, c)$

vetor qualquer no plano π : $\vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

\downarrow
 d

$$\therefore \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Equação geral ou cartesiana do plano.

Exemplo: $\vec{n} = (3, 2, -4)$
 $A(2, -1, 3)$

Eq. geral: $ax + by + cz + d = 0$

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

sendo $A(2, -1, 3)$ um ponto do plano, temos:

$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0$$

$$6 - 2 - 12 = -d$$

$$d = 8$$

Logo, a equação geral do plano é $3x + 2y - 4z + 8 = 0$ ①

Exercício 1:

Escreva a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A(3, 1, -4)$ e é paralelo ao plano:

$$\pi_1: 2x - 3y + z - 6 = 0$$

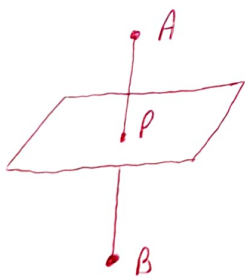
Sabe-se que $\vec{n} = (2, -3, 1)$

$$\begin{aligned}\pi \Rightarrow 2x - 3y + z + d &= 0 \\ 2(3) - 3(1) + (-4) + d &= 0 \\ 6 - 3 - 4 + d &= 0 \\ d &= 1\end{aligned}$$

Logo, a equação do plano π é: $2x - 3y + z + 1 = 0$

Exercício 2:

Estabelecer a equação geral do plano medidor do segmento AB , dados $A(2, -1, 4)$ e $B(4, -3, -2)$.



O ponto medidor de AB é

$$\vec{AP} = -\vec{BP}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad \therefore \underline{P(3, -2, 1)}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

O vetor normal ao plano: $\vec{AB} = B - A = (2, -2, -6)$

$$\vec{P_1P} = r \vec{P_2P}$$

$$x - x_1 = r(x - x_2)$$

$$y - y_1 = r(y - y_2)$$

$$z - z_1 = r(z - z_2)$$

$$x = \frac{x_1 - r x_2}{1 - r}$$

$$y = \frac{y_1 - r y_2}{1 - r}$$

$$z = \frac{z_1 - r z_2}{1 - r}$$

$$\text{Eq. geral do plano: } ax + by + cz + d = 0$$

$$2x + (-2)y - 6z + d = 0$$

$$2 \cdot (3) - 2(-2) - 6 \cdot (1) + d = 0$$

$$6 + 4 - 6 + d = 0$$

$$d = -4$$

$$\therefore \text{Eq. plano: } 2x - 2y - 6z - 4 = 0$$

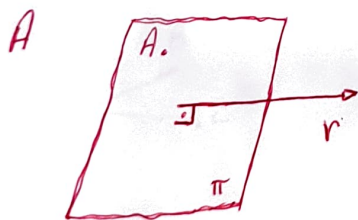
$$\text{ou } \frac{1}{2}(x - y - 3z - 2) = 0$$

$$\text{Eq. plano: } \underline{x - y - 3z - 2 = 0}$$

Exercício 3:

Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(2, 1, -2)$ e é perpendicular à reta:

$$r: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$



$$\vec{n} = (3, 2, 1)$$

$$\pi: 3x + 2y + z + d = 0$$

$$3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0$$

$$6 + 2 - 2 + d = 0$$

$$d = -6$$

Logo, a equação geral do plano $\pi: \underline{\underline{3x + 2y + z - 6 = 0}}$

Exercício

Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{n}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{i} - (3+2)\vec{j} + (-3-1)\vec{k} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

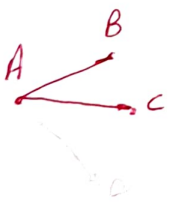
Eq. geral do plano: $ax + by + cz + d = 0$
 $-1x - 5y - 4z + d = 0$
 $-1(1) - 5(-3) - 4(4) + d = 0$
 $-1 + 15 - 16 + d = 0$
 $d = 2$

$$\therefore -x - 5y - 4z + 2 = 0$$

ou

$$\boxed{x + 5y + 4z - 2 = 0}$$

Estabelecer a equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2, 1, -1)$, $B(0, -1, 1)$ e $C(1, 2, 1)$.



$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\vec{n} = (-2, -2, 2) \times (-1, 1, 2)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4-2)\vec{i} - (-4+2)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Eq. geral do plano: $-6x + 2y - 4z + d = 0$
 $-6(2) + 2(1) - 4(-1) + d = 0$
 $-12 + 2 + 4 + d = 0$
 $d = 6$

$$\therefore -6x + 2y - 4z + 6 = 0$$

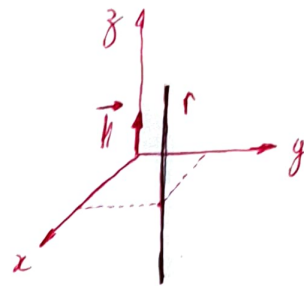
ou $-\frac{1}{2}(3x - y + 2z - 3) = 0$

$$\therefore \boxed{3x - y + 2z - 3 = 0} \quad (4)$$

Estabelecer a equação cartesiana do plano que contém a reta r e o ponto $B(-3, 2, 1)$.

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{eq. paramétrica da reta: } \begin{cases} x = 4 + 0t \\ y = 3 + 0t \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$



Um ponto na reta $A(4, 3, 0)$

vetor diretor da reta:

$$\vec{n} \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1)$$

↳ pode ser qualquer valor, pois estará na reta que é paralela a \vec{n}

$$\vec{n} = \vec{n} \times \vec{AB} = (0, 0, 1) \times (-7, -1, 1)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} + 0\vec{k} \\ (1, -7, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. geral do plano: } & 1x - 7y + 0z + d = 0 \\ & 1(-3) - 7(2) + 0(1) + d = 0 \\ & -3 - 14 + d = 0 \\ & d = 17 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\pi: x - 7y + 17 = 0}$$