

Geometria Analítica

O plano

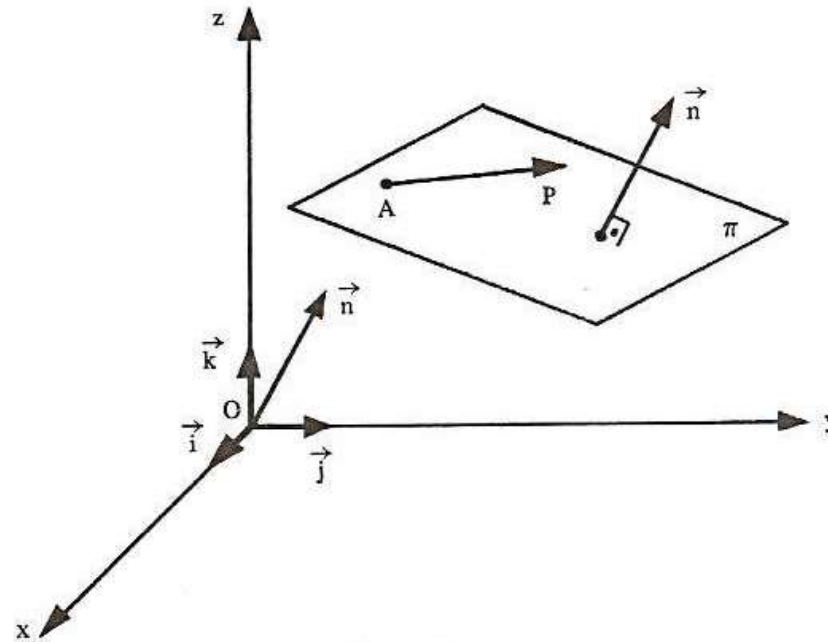
Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Equação geral do Plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq (0,0,0)$ um vetor normal (ortogonal) ao plano. O plano π pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$.

O ponto P pertence a π se, e somente se:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$



Equação geral ou cartesiana do plano π :

$$ax + by + cz + d = 0$$

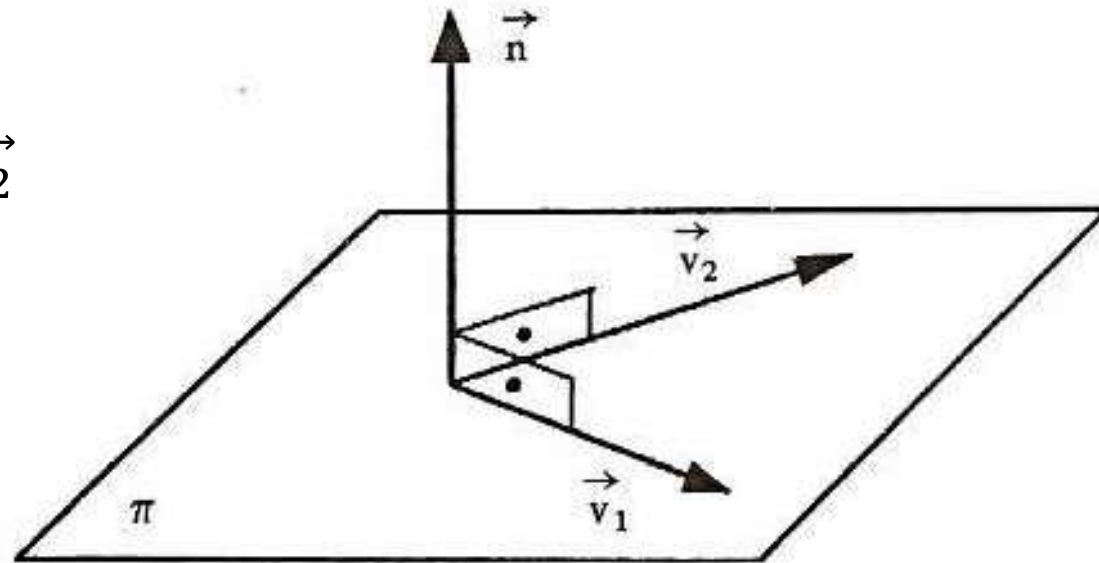
Observações:

- a) O plano π é definido por: um ponto no plano e por vetor normal a π .

$k\vec{n}$, $k \neq 0$, é também vetor normal ao plano.

- b) Sendo $\vec{n}$ um vetor ortogonal ao plano π , ele será ortogonal a qualquer vetor representado neste plano.

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$



- c) Como o vetor $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano, $\vec{n}$ também é normal a qualquer plano paralelo a π .

Assim, todos os infinitos planos paralelos a π têm a equação geral do tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

na qual d é o elemento que diferencia um plano de outro.

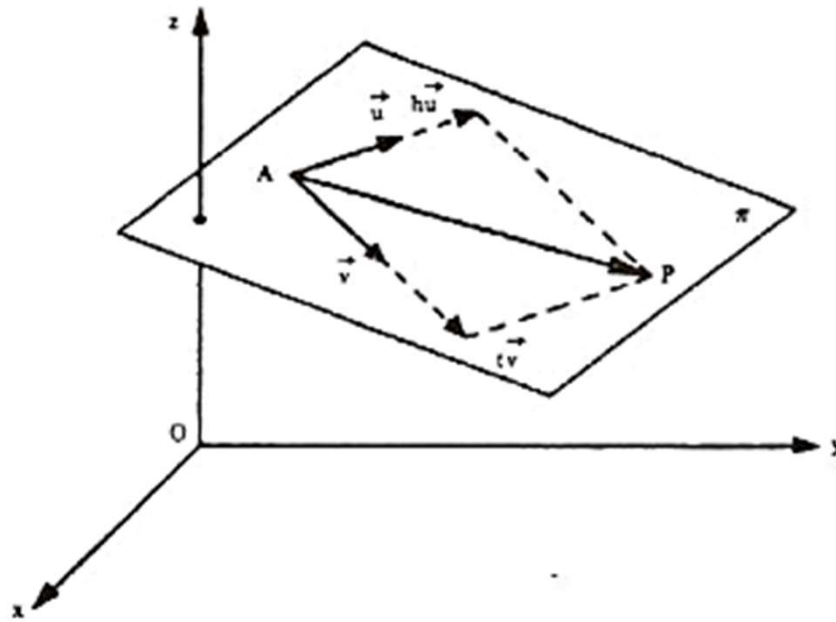
Exercício

Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$, sendo $\vec{n} = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π .

Equações paramétricas do plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano π que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se, e somente se, existem números reais h e t tais que:

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$



$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

$$x = x_0 + a_1h + a_2t$$

$$y = y_0 + b_1h + b_2t$$

$$z = z_0 + c_1h + c_2t$$

Estas são as equações paramétricas do plano.

Quando h e t , denominados parâmetros, variam de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto P percorre o plano π .

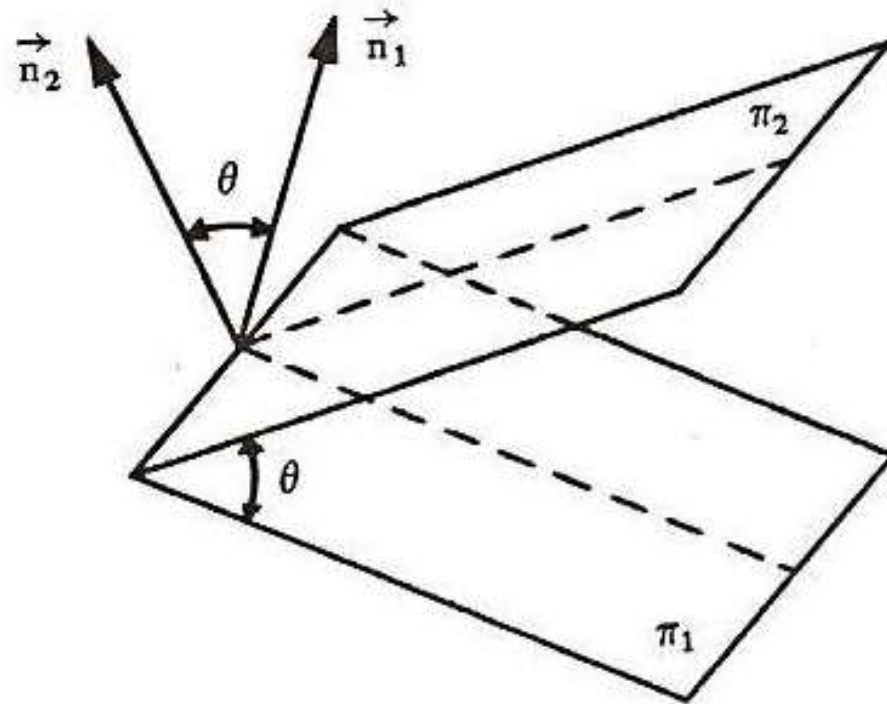
Ângulo entre dois planos

Sejam os planos:

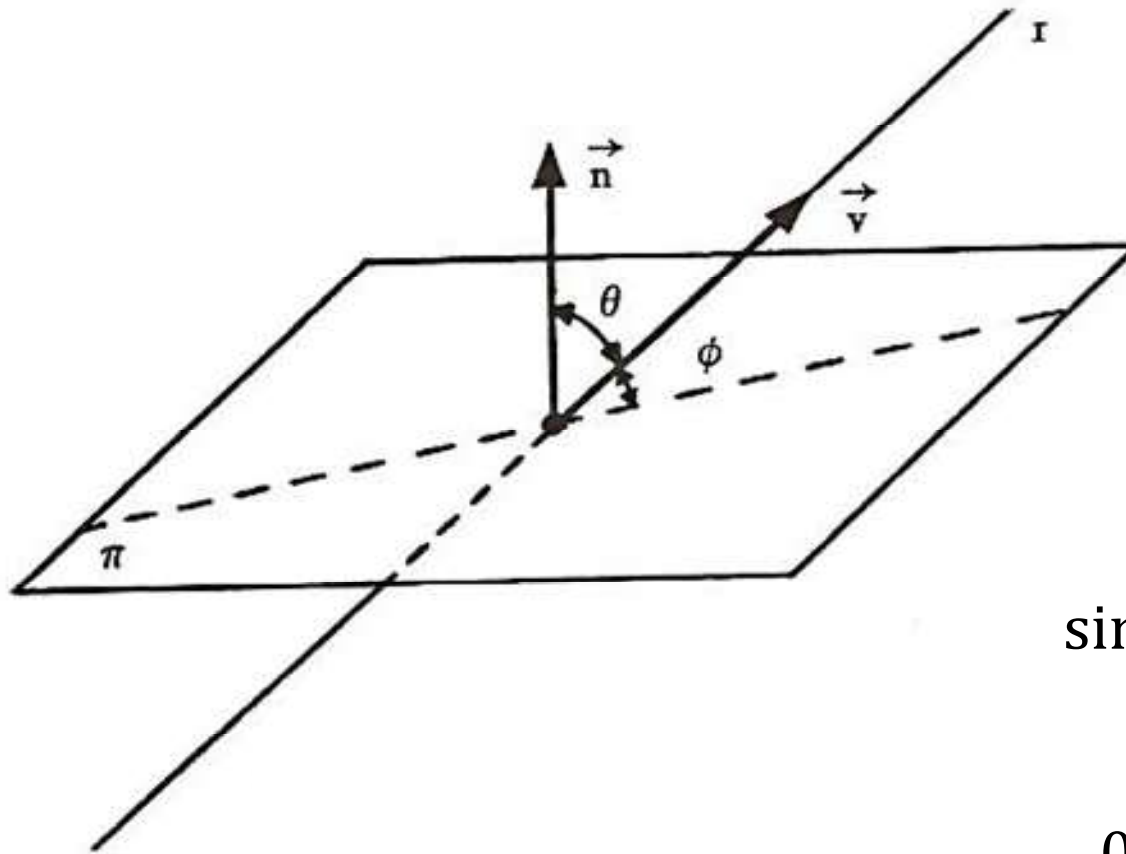
$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$



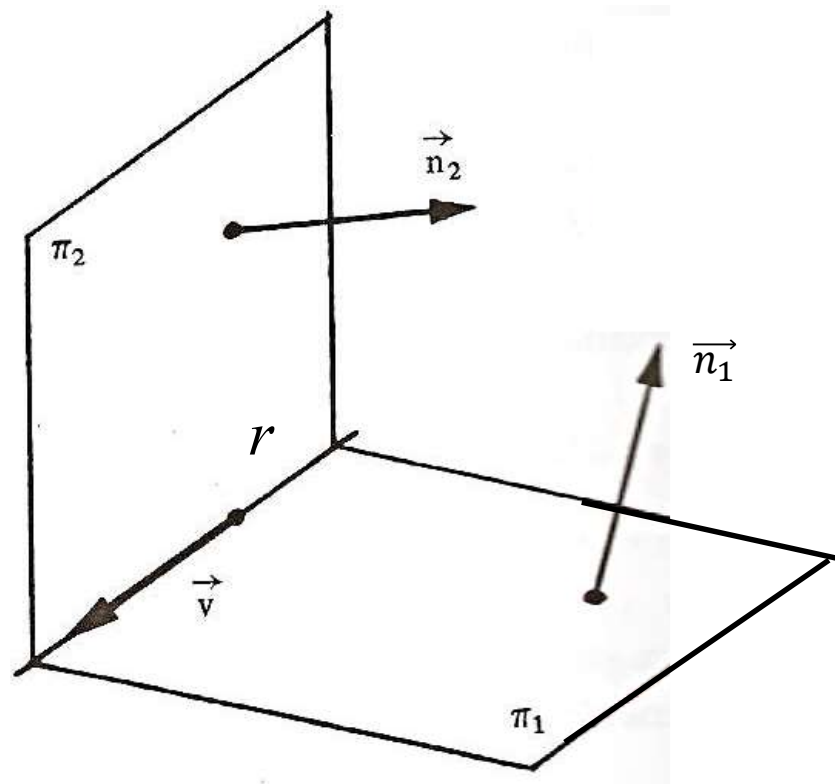
Ângulo de uma reta com um plano



$$\sin \phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|}$$

$$0 \leq \phi \leq \pi/2$$

Interseção de dois planos



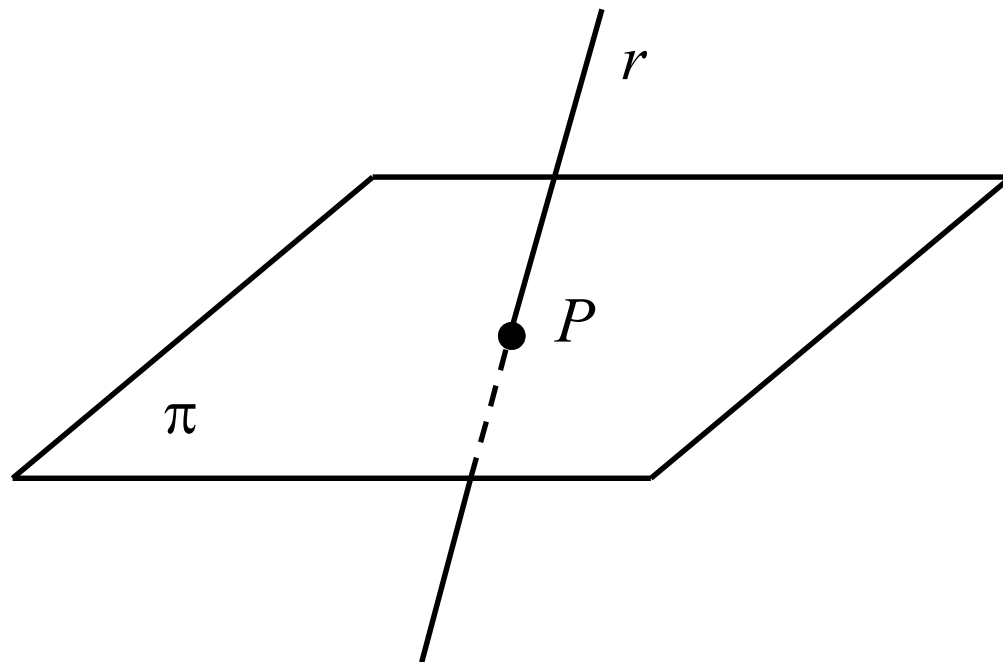
O conjunto de pontos formados pela interseção de dois planos, não paralelos, resulta em uma reta.

Exemplo:

$$\pi_1 : 5x - 2y + z + 7 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 3y + z + 4 = 0$$

Interseção de reta com plano



Exemplo:

$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{array} \right.$$

$$\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0$$