

Ondas Electromagnéticas II

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Cap. 7]

[A. Zangwill; Modern Electrodynamics, Sec 18.5.4]

Meios materiais com ϵ ; μ constantes

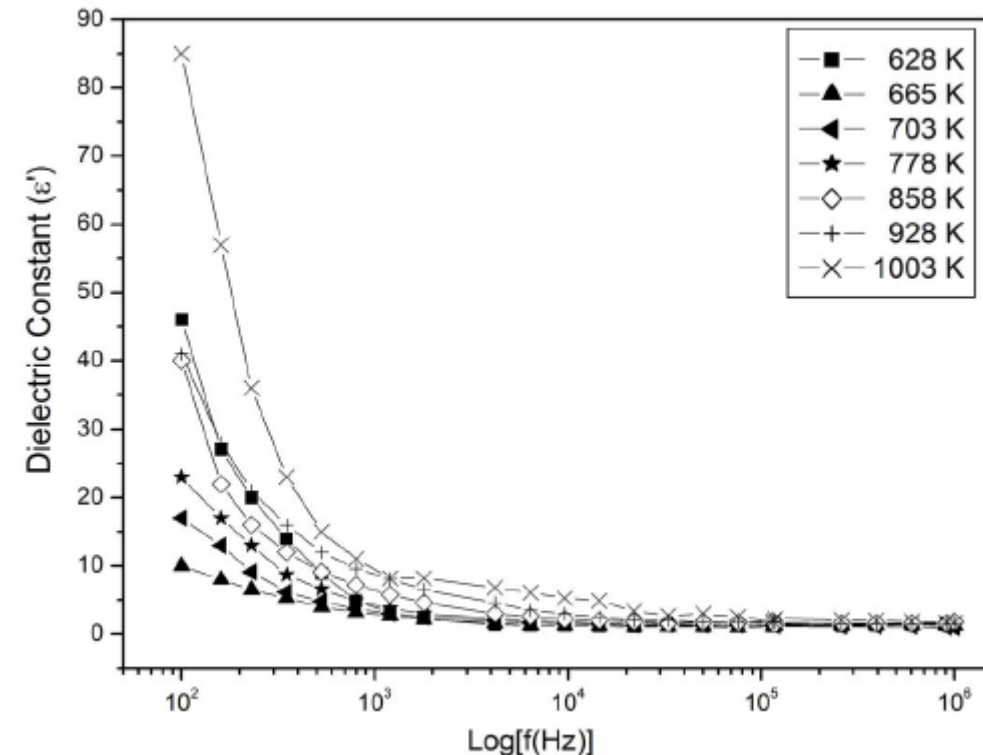
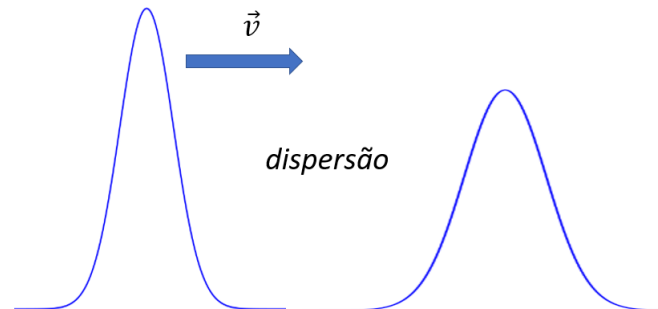
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}; k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}; n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Meios em que a polarização depende da frequência

Exemplo: cerâmica Si_3N_4

[I. Khan and M. Zulfequar; Materials Science and Applications 2, 739 (2011)]

→ pacote de ondas, cada componente de Fourier tem velocidade de fase distinta



Modêlo Clássico de Drude-Lorentz

- Na presença do campo elétrico da onda moléculas se polarizam

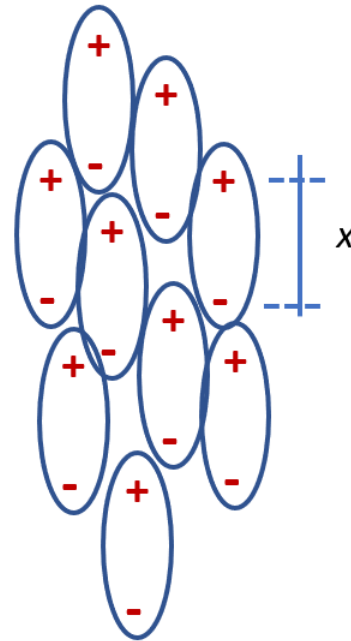
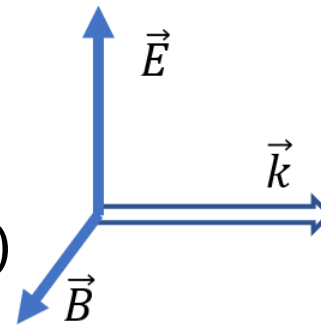
$$\vec{p} = q\vec{x}$$

- Densidade de moléculas $N \rightarrow$ vetor polarização

$$\vec{P} = Nq\vec{x}$$

- Meio linear

$$\vec{P} = \chi \vec{E}; \chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$$



- Campo efetivo atuando nas moléculas (Panofski & Phillips; Cap.2)

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\nu}{\epsilon_0} \vec{P}; \quad (\text{meio dielétrico não polar: } \nu = 1/3; \text{ meio condutor: } \nu = 0)$$

- Força atuando sobre as cargas

$$\vec{f}_e = q\vec{E}_m = q \left(1 + \frac{\nu\chi}{\epsilon_0} \right) E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_x$$

- Cargas em átomos e moléculas não são cargas livres, mas ligadas. Como os elétrons estão em equilíbrio, quando deslocados pelo campo da onda são submetidos a uma força restauradora dada por

$$f_{res} = m\omega_0^2 x$$

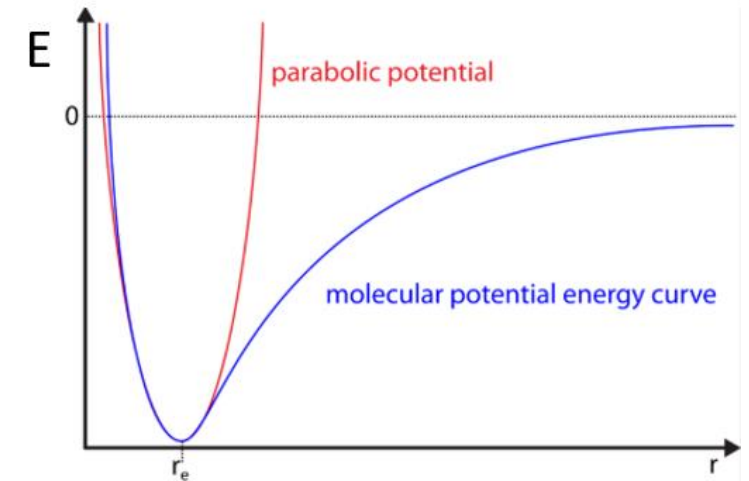
onde ω_0 é a frequência natural de vibração do átomo ou molécula (valor correto dado por cálculo quântico).

- Quando elétrons oscilam, perdem energia por radiação e também fazem moléculas oscilarem. Efeitos podem ser modelados por uma força de amortecimento proporcional à velocidade

$$f_{amo} = m\gamma v$$

Equação de movimento para o elétron

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\gamma \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x + qE_m$$



Substituindo a expressão para E_m , obtemos

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) = q \left(1 + \frac{\nu \chi}{\epsilon_0} \right) E_0 e^{-i\omega t}$$

Nesta expressão, fator de fase $ikz = i2\pi(z/\lambda)$ foi desprezado na expressão do campo da onda. Este fator significa que o deslocamento dos elétrons vai depender da posição da molécula no campo da onda. Mas, a não ser para altíssimas frequências, o espaçamento entre moléculas é muito menor que λ , de forma que supomos que os elétrons de diferentes moléculas oscilam praticamente em fase – **Aproximação de Dipolo**.

Solução (oscilador harmônico forçado)

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}; \quad x_0 = \frac{\frac{q}{m} \left(1 + \frac{\nu \chi}{\epsilon_0} \right) E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Substituindo na expressão para $\vec{P}$, temos

$$P = Nq x_0 e^{-i\omega t} \rightarrow \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} (\epsilon_0 + \nu \chi) \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0$$

Utilizando a definição da frequência de plasma: $\omega_p^2 = Nq^2/m\epsilon_0$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{1 + \nu(\epsilon_r - 1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Definindo a frequência de ressonância efetiva

$$\bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \nu\omega_p^2$$

Obtemos, finalmente a expressão para a constante dielétrica relativa

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$R_e\epsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2(\bar{\omega}_0^2 - \omega^2)}{(\bar{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} ; \quad I_m\epsilon_r = \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\bar{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

- ✓ No vácuo, $\omega_p = 0 \rightarrow \epsilon_r = 1$
- ✓ Na presença de dissipação, $\gamma \neq 0$, constante dielétrica complexa
- ✓ Efeito do meio máximo para $\omega \approx \bar{\omega}_0 \rightarrow$ Ressonância

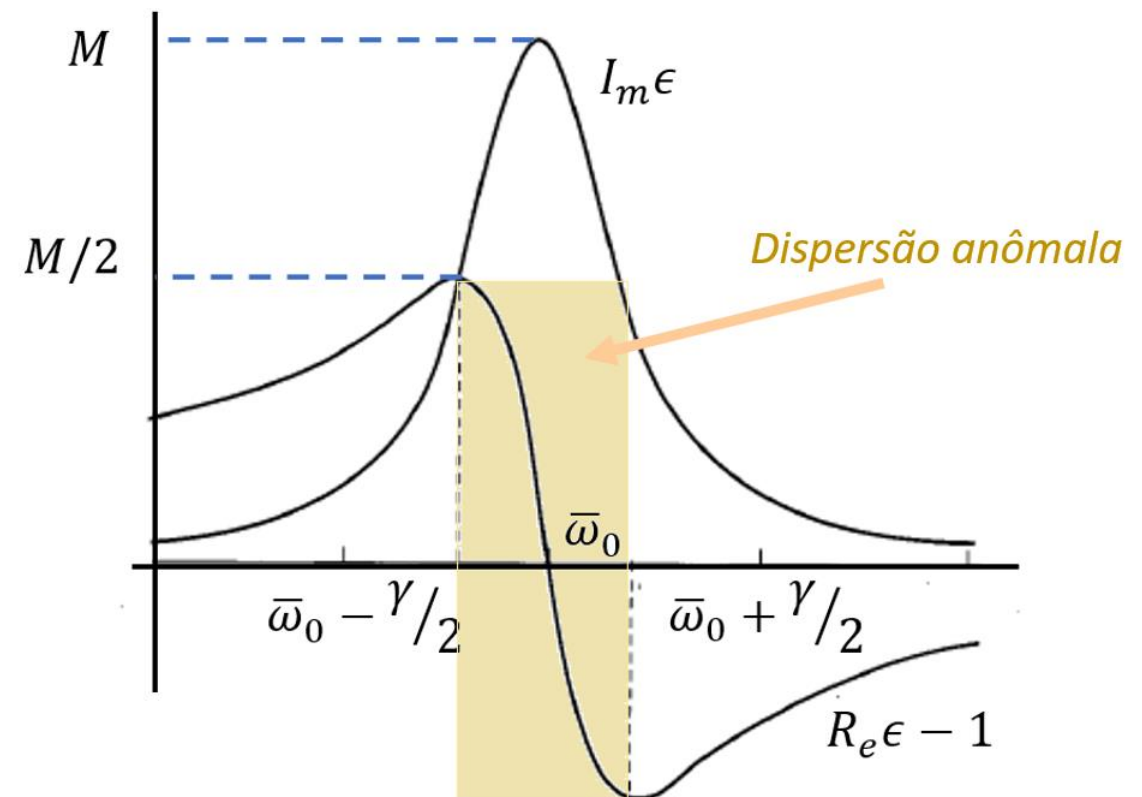
Comportamento próximo à ressonância

$$\omega^2 \approx \bar{\omega}_0^2 \rightarrow \bar{\omega}_0^2 - \omega^2 = (\bar{\omega}_0 + \omega)(\bar{\omega}_0 - \omega) \approx 2\bar{\omega}_0(\bar{\omega}_0 - \omega)$$

$$R_e \epsilon_r \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\bar{\omega}_0^2} \frac{(\bar{\omega}_0 - \omega)}{(\bar{\omega}_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}; \quad I_m \epsilon_r = \frac{\omega_p^2}{2\bar{\omega}_0^2} \frac{\gamma/2}{(\bar{\omega}_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}$$

Exercício: mostrar que

1. $M = \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_0 \gamma}$
 2. pontos de meia altura de $I_m \epsilon$ coincidem com máximo de $|R_e \epsilon - 1|$ e são dados por $\bar{\omega}_0 \pm \gamma/2$
 3. largura `meia altura de $I_m \epsilon = \gamma$
-



Índice de refração e dispersão anômala

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \cong \sqrt{\epsilon_r}$$

Exercício: mostrar que

$$n_r^2 = \frac{1}{2} \left[R_e \epsilon + \sqrt{(R_e \epsilon)^2 + (I_m \epsilon)^2} \right]; \quad n_i^2 = \frac{1}{2} \left[-R_e \epsilon + \sqrt{(R_e \epsilon)^2 + (I_m \epsilon)^2} \right]$$

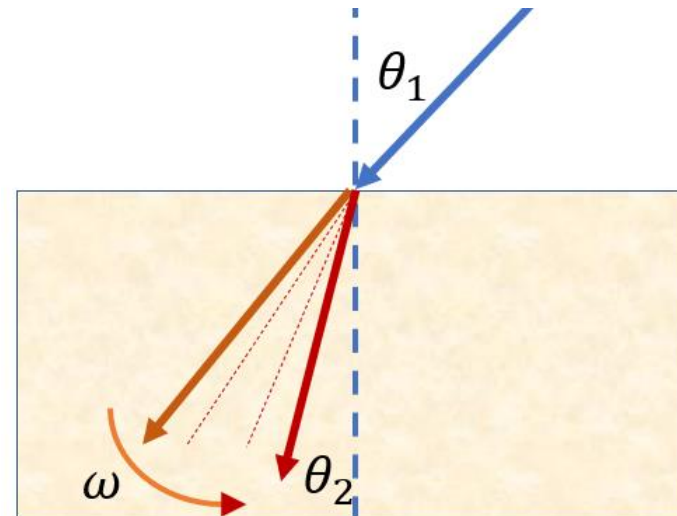
Pesquise na literatura o significado da parte imaginária do índice de refração

Dispersão normal:

índice de refração aumenta com frequência

Dispersão anômala:

índice de refração diminui com frequência



$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n}$$

Significado da parte imaginária da constante dielétrica

$$\vec{D} = \epsilon_0(R_e\epsilon + iI_m\epsilon)\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{R_e\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{I_m\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Multiplicando escalarmente a primeira equação por $\vec{B}$ e a segunda por $\vec{E}$, como fizemos para obter o Vetor de Poynting, obtemos

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 R_e \epsilon}{2} E^2 \right) = -I_m \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

Lado direito representa potência eletromagnética dissipada no meio dielétrico.

Exercício: fator de qualidade do material é definido como

$$Q = 2\pi \frac{\textit{m}{\acute{a}xima energia armazenada por ciclo}}{\textit{energia dissipada por ciclo}}$$

1. Mostre que $Q = R_e \epsilon / I_m \epsilon$ para uma onda plana se propagando em um material.
2. Para o modelo de Drude-Lorentz,

$$Q = \frac{\gamma \bar{\omega}_0}{\omega_p^2}$$
