

Propriedades Gerais das Equações

Reconhecida a impossibilidade de resolver a maior parte das equações, em forma explícita, põe-se a questão de saber se o problema sob estudo tem solução. Chegamos assim às questões de existência de solução de um problema, sem aquela preocupação de exibir a solução. O resultado central nessa direção é o teorema de Picard, Teorema 3.1, seção 3.2, que fala sobre a existência de solução para o problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

A demonstração usa o princípio da contração e exibe uma vestimenta moderna para o método das aproximações sucessivas, já conhecido e usado com sucesso pelos matemáticos do século passado. Neste capítulo, também dedicamos especial atenção aos aspectos geométricos ligados às equações diferenciais. Visando um estudo adequado das equações exatas, bem como futuras aplicações, dedicamos a seção 3.3 ao estudo de campos vetoriais e formas diferenciais. Como o leitor verá, há vantagens inegáveis em usar formas diferenciais para tratar as equações exatas. Por essa razão, desenvolvemos também naquela seção o estudo das formas diferenciais, o que tranquilizará o leitor mais exigente, mostrando-lhe que é fácil formalizar uma linha de procedimento supostamente imprecisa.

3.1. Interpretação Geométrica da Equação $y' = f(x, y)$

A forma explícita geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem é

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

onde $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano (x, y) .

Uma *solução* de (3.1) é uma função diferenciável $y = \phi(x)$ definida em um intervalo aberto I e tal que

$$(x, \phi(x)) \in \Omega, \quad \text{para todo } x \in I, \quad (3.2)$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \text{para todo } x \in I. \quad (3.3)$$

Um dos problemas básicos no estudo da equação diferencial (3.1) é a determinação de suas soluções; esse foi o tipo de questão que estudamos em todo o Capítulo 2 para diferentes tipos de equações. Entretanto a obtenção de soluções de (3.1) na *forma fechada*, isto é, numa forma explícita em termos de funções elementares, é um problema impossível de resolução para o caso geral de equações (3.1). O leitor deve ter observado que equações diferenciais de aspecto muito simples apresentaram dificuldades técnicas apreciáveis em sua resolução. Em verdade, a maior parte das equações não pode ser resolvida explicitamente.

Em muitos problemas de aplicação não se faz necessário saber a expressão algébrica das soluções da equação diferencial. Basta saber propriedades dessas soluções, como por exemplo, seu comportamento quando x tende para algum valor pré-estabelecido. Com isso em vista, é interessante e importante estudar as propriedades geométricas da família das soluções da equação diferencial. Este é o outro problema básico no estudo das equações diferenciais, que pertence à chamada *teoria qualitativa*.

Um terceiro problema de importância no estudo de (3.1) é a teoria da existência e unicidade de solução do problema de valor inicial. O *problema de valor inicial* consiste no seguinte: dadas a equação diferencial e um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$, determinar um intervalo aberto I contendo x_0 e uma função diferenciável $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que as relações (3.2) e (3.3) acima se verificam e, além disso,

$$\phi(x_0) = y_0, \quad (3.4)$$

que é a chamada *condição inicial*.

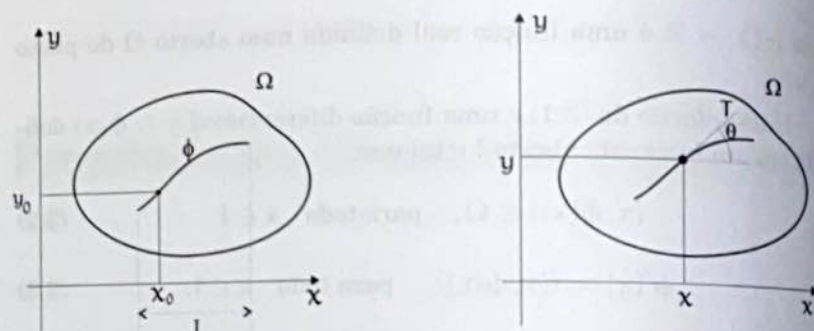


Figura 3.1

Para melhor compreender esses problemas no caso geral (3.1) é importante ver o significado geométrico da equação diferencial. A função f atribui a cada ponto de Ω um número, $f(x, y)$; a equação diferencial diz que a solução que passar por esse ponto deve ter inclinação igual a esse número:

$$\operatorname{tg} \theta = f(x, y)$$

onde θ é o ângulo da tangente T à solução com o eixo x .

Essa interpretação pode se tornar ainda mais geométrica se imaginarmos o seguinte. Em cada ponto de Ω damos um vetor $\vec{v}(x, y) = (1, f(x, y))$ que determina a tangente T . Assim, temos um campo vetorial definido em Ω . As soluções de (3.1) são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto (x, y) são $\vec{v}(x, y)$. Essas curvas são chamadas também de *curvas integrais*.

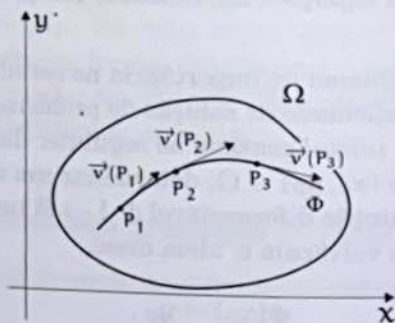


Figura 3.2

Na visualização do campo vetorial descrito no parágrafo anterior é útil conhecer as isóclinas. Uma curva $y = \psi(x)$ é uma *isóclina* se $f(x, \psi(x)) = \text{cte}$. Assim o campo vetorial v é constante ao longo das isóclinas.

Exemplo. Considere a equação

$$y' = 1 - x^2 - y^2.$$

As isóclinas são os círculos centrados na origem. Vê-se assim que em todos os pontos de $x^2 + y^2 = 1$ o campo vetorial v é paralelo ao eixo- x e igual a $(1, 0)$. Já nos pontos do círculo $x^2 + y^2 = 2$ o campo vetorial tem inclinação de -45° e é igual a $(1, -1)$.

3.2. Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Nesta seção demonstramos um teorema que dá condições suficientes para a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial. Um resultado dessa natureza é importante para podermos afirmar que, mediante certas condições, a região está coberta por curvas integrais.

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade.) *Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I.)*

$$y' = f(x, y) \quad (3.5)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.6)$$

O primeiro passo na demonstração deste teorema é a transformação do problema de valor inicial no problema de resolução de uma equação integral, o que se faz no lema a seguir.

Lema 3.2. *Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num aberto Ω do plano (x, y) . Então, uma função diferenciável $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial (3.5)-(3.6) se e somente se for uma solução*

da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in I. \quad (3.7)$$

Demonstração: 1) Se ϕ é solução do problema de valor inicial, (3.5)-(3.6), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é solução da equação integral (3.7). 2) Reciprocamente, se $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que é solução da equação integral (3.7), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é também solução do problema de valor inicial (3.5)-(3.6). ■

Concentremo-nos pois na resolução da equação integral (3.7). Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tomemos a e b positivos tais que o retângulo

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\} \quad (3.8)$$

esteja contido em Ω . Como f é contínua e B é compacto (i.e., fechado e limitado), temos que f é limitada em B ; seja

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B\}.$$

Sejam

$$0 < \bar{a} \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

e

$J_{\bar{a}}$ o intervalo fechado $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções contínuas $g: J_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$; graficamente, queremos em $\mathcal{C}$ as funções contínuas cujos gráficos passem pelo ponto (x_0, y_0) e que estejam contidos no retângulo B .

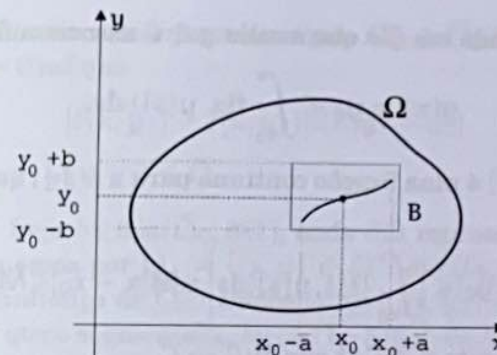


Figura 3.3.

Definimos em $\mathcal{C}$ a seguinte métrica (distância):

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\}; \quad (3.9)$$

é fácil verificar que (3.9) é, de fato, uma métrica, isto é, tem-se as propriedades:

$$d(g_1, g_2) \geq 0, \quad \text{e} \quad d(g_1, g_2) = 0 \quad \text{se e só se} \quad g_1 = g_2$$

$$d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$$

$$d(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2).$$

Portanto, $\mathcal{C}$ é um espaço métrico. Pode-se, então, falar em sucessão de Cauchy: (g_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existir n_0 tal que $d(g_n, g_m) < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$. Uma sucessão (g_n) converge para $g \in \mathcal{C}$ se dado $\varepsilon > 0$ existir n_0 tal que $d(g_n, g) < \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Diz-se que um espaço métrico $\mathcal{C}$ é completo se toda sucessão de Cauchy é convergente para algum elemento de $\mathcal{C}$.

O espaço métrico $\mathcal{C}$ definido no parágrafo anterior é completo, o que se prova simplesmente observando que a convergência na métrica d é a convergência uniforme de funções e lembrando que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua, veja Teorema 4, pag. 298, E.L. Lima, "Curso de Análise", vol. 1, Projeto Euclides, 1976.

Voltemos à consideração da equação integral (3.7). Consideremos

a função Φ definida em C e que a cada $y \in C$ associa a função

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Observe que $g(x)$ é uma função contínua para $x \in J_{\bar{a}}$, que $g(x_0) = y_0$ e que

$$|g(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\bar{a} \leq b$$

e conseqüentemente $g \in C$. Logo $\Phi: C \rightarrow C$.

A equação integral (3.7) pode ser escrita na forma funcional

$$y = \Phi(y).$$

Portanto, as soluções de (3.7) são os pontos fixos de Φ . A idéia agora é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, conhecido também como o Princípio da Contração:

"Seja C um espaço métrico completo. Suponha que $\Phi: C \rightarrow C$ é uma contração, isto é, existe uma constante $0 \leq k < 1$, tal que

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq kd(g_1, g_2).$$

para todos $g_1, g_2 \in C$. Então, existe um e somente um $g \in C$ tal que $g = \Phi(g)$.

Ao leitor interessado na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach sugerimos o livro de C.S. Hönig, "Aplicações da Topologia à Análise", Cap. II, Projeto Euclides, 1976.

A fim de aplicar este teorema ao problema que estamos estudando, resta apenas verificar se Φ é uma contração. Para tal, escrevemos

$$|\Phi(g_1)(x) - \Phi(g_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right|. \quad (3.10)$$

Para estimar o integrando no segundo membro de (3.10), usamos o seguinte resultado

Lema 3.3. *Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x, y) e tal que a derivada parcial $f_y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja também*

contínua. Dado um subconjunto limitado $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad (3.11)$$

para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$.

Demonstração: Seja $\delta \leq \text{dist}(\bar{\Omega}_0, \partial\Omega)$, onde $\partial\Omega$ representa a fronteira de Ω , e designemos por $\Omega_\delta = \{(x, y) \in \Omega : \text{dist}((x, y), \bar{\Omega}_0) < \delta/2\}$ uma $(\delta/2)$ -vizinhança de $\bar{\Omega}_0$. Dados $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$ com $|y_1 - y_2| < \delta$ temos que o segmento $[x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$, $0 \leq \lambda \leq 1$, está contido em Ω_δ . Aplicamos o teorema do valor médio

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2) \quad y_1 > y_2 \quad (3.12)$$

onde ξ está no segmento descrito acima. Usando

$$M_1 = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in \bar{\Omega}_\delta\},$$

obtemos de (3.12)

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M_1|y_1 - y_2|$$

que é válida para $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$ com $|y_1 - y_2| < \delta$. Para os pontos com $|y_1 - y_2| \geq \delta$, a estimativa abaixo se verifica

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta}|y_1 - y_2|,$$

onde M é o $\max |f(x, y)|$ para $(x, y) \in \bar{\Omega}_0$.

Logo, para obter (3.11) basta tomar $K = \max\{M_1, 2M/\delta\}$. ■

Voltemos à estimativa de (3.10). Usando o Lema 3.3, obtemos

$$|\Phi(g_1)(x) - \Phi(g_2)(x)| \leq K \left| \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| ds \right| \leq K\bar{a} d(g_1, g_2)$$

e daí

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq K\bar{a} d(g_1, g_2).$$

Concluimos que Φ é uma contração se $K\bar{a} < 1$. Logo basta tomar $\bar{a} < 1/K$. E o Teorema 3.1 fica demonstrado com $I = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$. ■

Comentários sobre o valor de $\bar{a}$, raio do intervalo I . Acabamos de mostrar a existência de uma solução do P.V.I. (3.5)-(3.6) num intervalo $I =$

$(x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$. Se bem que $\bar{a}$ depende da função f e da distância do ponto (x_0, y_0) à fronteira $\partial\Omega$ de Ω , o seguinte resultado é de grande importância:

Lema 3.4. Se $K \subset \Omega$ é compacto, então um mesmo $\bar{a}$ pode ser escolhido de modo a servir para todas as condições iniciais $(x_0, y_0) \in K$.

Demonstração: Considere uma δ -vizinhança K_δ de K tal que

$$K \subset K_\delta \subset \bar{K}_\delta \subset \Omega$$

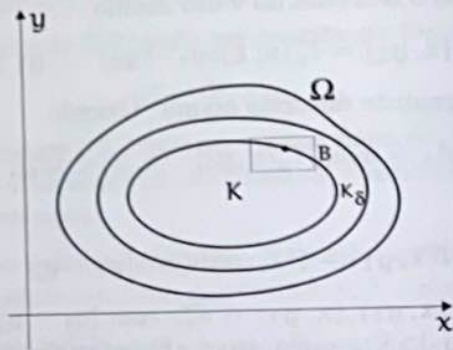


Figura 3.4

então podemos escolher a e b tais que o retângulo B esteja contido em $\bar{K}_\delta$ para todos os pontos $(x_0, y_0) \in K$. Portanto basta tomar

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in \bar{K}_\delta\}$$

e $\bar{a}$ satisfazendo

$$\bar{a} < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}$$

onde K é a constante dada pelo Lema 3.3 com $\Omega_0 = K_\delta$.

Comentários sobre a necessidade das hipóteses do Teorema 3.1. A mera hipótese da continuidade de f garante a existência, mas não a unicidade de solução do problema de valor inicial (3.5)-(3.6); a demonstração da existência com apenas a continuidade de f usa as chamadas poligonais de Euler ou o teorema de ponto fixo de Schauder. Para se

ter unicidade é necessário assumir alguma hipótese adicional à continuidade de f ; veja o Exemplo 1, a seguir. Um estudo completo das questões apenas mencionadas acima pode ser visto no livro de J. Hale, "Ordinary Differential Equations", Wiley-Interscience, 1969.

Exemplo 1. Considere o problema de valor inicial

$$y' = |y|^{1/2} \quad y(0) = 0. \quad (3.14)$$

Neste exemplo, $f(x, y) = |y|^{1/2}$ que é contínua em todo o plano (x, y) . A função $y(x) \equiv 0$ é solução deste problema de valor inicial (3.14). Entretanto, há outra solução, a qual o leitor pode obter usando o método das equações separáveis e considerando os casos $y > 0$ e $y < 0$; essa outra solução é

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Uma pergunta para prosseguir. O Teorema 3.1 estabelece a existência local de solução. A pergunta natural é se a solução obtida naquele teorema pode ser estendida a um intervalo de definição maior, e neste caso até onde. Antes de enunciar resultados sobre essa questão, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 \quad y(1) = 1. \quad (3.15)$$

Neste exemplo, $f(x, y) = y^2$ e $f_y(x, y) = 2y$ são contínuas em todo o plano (x, y) . O Teorema 3.1 nos diz que existe uma e só uma solução do problema de valor inicial (3.15) definida em um intervalo $(1 - \bar{a}, 1 + \bar{a})$. Será que pode ser estendida para todo x ? A resposta é não, pois a solução de (3.15) é

$$y(x) = \frac{1}{2-x}$$

cujo domínio de definição é $(-\infty, 2)$. Entretanto se a condição inicial em (3.15) for substituída por $y(0) = 0$, a solução é $y(x) \equiv 0$ definida para todo x .

Exemplo 3. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. A solução $y = \ln(x+1)$ está definida para $x > -1$.

Exemplo 4. $y' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$, $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$. A solução $y = \sin \frac{1}{x}$ está definida para $x > 0$.

Teorema 3.5. Mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Toda solução do P.V.I. (3.5)-(3.6) pode ser estendida a um intervalo maximal, o qual é aberto.

Para demonstrarmos esse teorema precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.6. Sejam $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ soluções do P.V.I. (3.5)-(3.6) definidas, respectivamente, em intervalos abertos I_1 e I_2 contendo x_0 . Então ϕ_1 e ϕ_2 coincidem em $I_1 \cap I_2$.

Demonstração: Temos que $\tilde{I} := I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto. O subconjunto J de $\tilde{I}$ definido por

$$J = \{x \in \tilde{I} : \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$$

é obviamente fechado em $\tilde{I}$ e também não vazio, pois $x_0 \in J$. Além disso, J é aberto em $\tilde{I}$, pela aplicação do Teorema 3.1. Logo $J = \tilde{I}$, onde usamos o fato de um intervalo ser um conjunto conexo. ■

Demonstração do Teorema 3.5: Considere o conjunto de todas as soluções ϕ_i do P.V.I. (3.5)-(3.6) definidas em intervalos abertos I_i contendo x_0 . A seguir, seja $I = \bigcup I_i$ e defina uma função $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: dado $x \in I$, como $x \in I_i$ para algum i , defina

$$\phi(x) = \phi_i(x).$$

A função ϕ está bem definida em virtude do Lema 3.6. Além disso, ϕ é solução do P.V.I. (3.5)-(3.6), porque ϕ_i o é, e I é aberto. Usaremos a notação $I = (w_-, w_+)$. Afirmamos que I é maximal, isto é, não existe um intervalo contendo propriamente I onde o P.V.I. (3.5)-(3.6) tenha solução $\tilde{\phi}$. De fato, se houvesse um tal intervalo, este conteria uma das extremidades, digamos w_+ . Então, pelo Teorema 3.1, a solução de

$$y' = f(x, y)$$

$$y(w_+) = \tilde{\phi}(w_+)$$

existiria num intervalo $(w_+ - \bar{a}, w_+ + \bar{a})$. Observe que o fato de $\tilde{\phi}$ ser solução definida em w_+ implica que o ponto $(w_+, \phi(w_+))$ pertence ao aberto Ω . Daí poderemos aplicar o Teorema 3.1. Concluimos que a função $\hat{\phi}$ definida no intervalo $\hat{I} = (w_-, w_+ + \bar{a})$ por

$$\hat{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{para } x \in (w_-, w_+) \\ \tilde{\phi}(x) & \text{para } x \in [w_+, w_+ + \bar{a}) \end{cases}$$

é solução P.V.I. (3.5)-(3.6). Isso é, porém impossível pois I foi a união de todos os intervalos abertos contendo x_0 , onde o P.V.I. (3.5)-(3.6) tem solução, e $\hat{I}$ contém I propriamente. ■

Relação entre a fronteira $\partial\Omega$ e a solução ϕ definida no seu intervalo maximal. A pergunta que motiva esse item é: Qual o comportamento de $(x, \phi(x))$, quando x se aproxima dos extremos do intervalo maximal $I = (w_-, w_+)$. No Exemplo 2 acima, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $I = (-\infty, 2)$ e $\phi(x) \rightarrow +\infty$, quando $x \rightarrow 2^-$. No Exemplo 4, Ω é o semiplano $x > 0$, $I = (0, \infty)$ e a solução $\phi(x)$ tende para o segmento $-1 \leq y \leq 1$, do eixo y . O que vamos mostrar é que $(x, \phi(x))$ tende para a fronteira de Ω , no sentido que a solução sai de qualquer compacto contido em Ω .

Teorema 3.7. Se $\phi(x)$ é solução do P.V.I. (3.5)-(3.6) com intervalo maximal $I = (w_-, w_+)$, então $(x, \phi(x)) \rightarrow \partial\Omega$ quando $x \rightarrow w_+$ (o mesmo vale para $x \rightarrow w_-$), isto é, dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $\tau < w_+$ tal que $(x, \phi(x)) \notin K$ para $x \in (\tau, w_+)$.

Demonstração: 1) Se $w_+ = +\infty$, dado K compacto em Ω , tome

$$\tau = \sup_{(x,y) \in K} x$$

e portanto $(x, \phi(x)) \notin K$ se $x > \tau$.

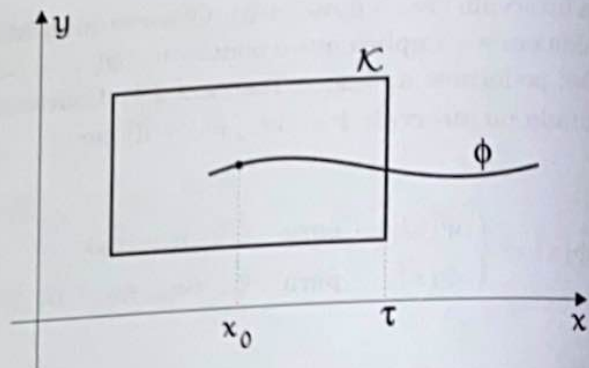


Figura 3.5

2) Se $w_+ < +\infty$, dado $K \subset \Omega$ temos pelo Lema 3.4 que o raio $\bar{u}$ pode ser escolhido o mesmo para todas as condições iniciais em K . Se $(x_1, \phi(x_1)) \in K$, então ϕ está definida em $(x_1 - \bar{u}, x_1 + \bar{u})$. Tome $\tau = w_+ - \bar{u}$, temos que $(x, \phi(x)) \notin K$ se $x \in (\tau, w_+)$, porque se $x_1 \in (\tau, w_+)$ e $(x_1, \phi(x_1)) \in K$, temos que $\phi(x)$ estaria definida em $(x_1 - \bar{u}, x_1 + \bar{u})$. E como

$$x_1 + \bar{u} > \tau + \bar{u} = w_+,$$

teríamos uma contradição ao fato de I ser maximal. ■

Observação: Este teorema é importante para determinarmos se as soluções de uma determinada equação são globalmente definidas, isto é, $w_+ = +\infty$. Quando Ω contém o semiplano $x \geq x_0$ e $w_+ < +\infty$, temos que o Teorema 3.7 implica que $|\phi(x)| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow w_+$. Dizemos nesse caso que temos um "blow up" para x finito. Consequentemente, se conseguirmos mostrar que $|\phi(x)|$ fica limitado, então temos obrigatoriamente que ϕ é globalmente definida. A observação importante nesse sentido é: Se $\phi'(x)$ é limitada, então $|\phi(x)|$ não pode tender a infinito para x em intervalos finitos. No Exemplo 4 acima temos $y'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ é limitada para $x \geq x_0 > 0$, portanto todas as soluções com $y(x_0) = y_0$ possuem intervalos máximos com $w_+ = +\infty$.

O seguinte resultado é de muita utilidade nas aplicações:

Teorema 3.8. Suponhamos que Ω seja a faixa $\{(x, y) : a < x < b\}$

e que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua. Suponhamos que a derivada parcial $f_y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e limitada. Então para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe uma única função diferenciável $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ que é solução do problema de valor inicial (3.5)-(3.6).

Demonstração: Basta mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ dado, a solução do problema de valor inicial (3.5)-(3.6) está definida em $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Sejam $K_1 = \max\{|f(x, y_0)| : a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon\}$ e $K_2 = \sup\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in \Omega\}$. Então, pelo teorema do valor médio,

$$|f(x, y)| \leq |f(x, y_0)| + |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq K_1 + K_2|y - y_0|$$

e daí, usando (3.7) obtemos

$$|y(x) - y_0| \leq K_1 + K_2 \int_{x_0}^x |y(s) - y_0| ds. \quad (3.16)$$

Isso implica (veja Lema 3.9 a seguir)

$$|y(x) - y_0| \leq K_1 e^{K_2(x-x_0)} \leq \text{const} \quad (3.17)$$

o que mostra que $y(x)$ não tende a infinito. Logo, o intervalo de definição da solução (3.5)-(3.6) é $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Como ε é arbitrário obtemos o resultado. ■

Lema 3.9 (Lema de Gronwall). Sejam α, β e δ funções contínuas definidas em um intervalo (a, b) , tais que $\beta \geq 0$ e

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \delta(s) ds. \quad (3.18)$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^x \beta(u) du} ds. \quad (3.19)$$

Em particular se $\alpha(x) = K = \text{const}$, temos

$$\delta(x) \leq K e^{\int_{x_0}^x \beta(s) ds}. \quad (3.20)$$

Demonstração: Seja

$$\omega(x) = \int_{x_0}^x \beta(s) \delta(s) ds.$$

Então $\omega'(x) = \beta(x)\delta(x)$. E daí, usando (3.18),

$$\omega'(x) \leq \beta(x)\alpha(x) + \beta(x)\omega(x)$$

que pode ser escrita como

$$[\omega(x)e^{-B(x)}]' \leq \beta(x)\alpha(x)e^{-B(x)}$$

onde $B'(x) = \beta(x)$. Daí se segue

$$\omega(x)e^{-B(x)} \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{-B(s)} ds,$$

e finalmente

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + e^{B(x)} \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{-B(s)} ds,$$

o que implica (3.19). A verificação de (3.20) é imediata utilizando

$$\beta(s)e^{\int_s^x \beta(u)du} = -\frac{d}{ds} \left(e^{\int_s^x \beta(u)du} \right). \quad \blacksquare$$

O resultado abaixo foi estabelecido diretamente no Capítulo 2. Enunciamô-lo, em separado, pois ele é também válido no caso de sistemas. E nesse caso a demonstração mais simples é através do Teorema 3.8.

Corolário 3.10. Se $f(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x)$ onde α e β são funções contínuas em (a, b) , então as soluções de (3.5) estão definidas em todo o intervalo (a, b) .

Além da questão de existência e unicidade de solução do P.V.I. (3.5)-(3.6), para que a teoria tenha sentido fisicamente, é preciso mostrar que as soluções dependem continuamente da condição inicial. Vamos estabelecer essa propriedade de modo preciso no próximo teorema.

Teorema 3.11. (Dependência Contínua). Mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções de (3.5) definidas em $[x_0, x_1]$, então existe $K > 0$ tal que

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| e^{K(x-x_0)}$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Demonstração: Dadas as soluções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ de (3.5), definidas no intervalo fechado $[x_0, x_1]$, podemos tomar Ω_0 como no Lema 3.3, e de modo que Ω_0 contenha os gráficos de ϕ_1 e ϕ_2 . Seja K a constante dada pelo Lema 3.3.

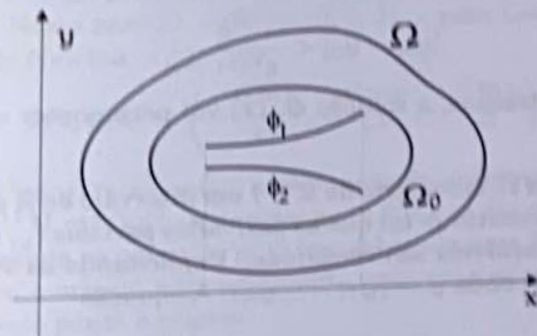


Figura 3.6

Como

$$\phi_1'(x) - \phi_2'(x) = f(x, \phi_1(x)) - f(x, \phi_2(x))$$

segue-se, por integração, que:

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) = \phi_1(x_0) - \phi_2(x_0) + \int_{x_0}^x [f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))] ds.$$

Portanto, pelo Lema 3.3

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| + \int_{x_0}^x K|\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds,$$

de onde, usando a desigualdade de Gronwall (Lema 3.9), obtém-se:

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| e^{K(x-x_0)}. \quad \blacksquare$$

Observação: Considere uma solução $\phi_0(x)$ de P.V.I. (3.5)-(3.6), definida num intervalo compacto $[x_0, x_1]$, podemos concluir pelo teorema acima que, para uma sequência de condições iniciais y_n convergindo para $y_0 = \phi_0(x_0)$, as soluções correspondentes $\phi_n(x)$, que satisfazem (3.5)

e $\phi_n(x_0) = y_n$ também estão definidas nesse intervalo $[x_0, x_1]$ para n grande, e $\phi_n \rightarrow \phi_0$ uniformemente em $[x_0, x_1]$. Para isto, basta considerar Ω_0 como uma δ -vizinhança do gráfico de ϕ_0 ,

$$\{(x, \phi_0(x)) : x \in [x_0, x_1]\}_\delta = \Omega_0,$$

e n suficientemente grande tal que

$$|y_n - y_0| < \frac{\delta}{e^{K|x_1 - x_0|}}.$$

Nessas circunstâncias, a solução $\phi_n(x)$ vai permanecer em Ω_0 para $x \in [x_0, x_1]$.

Sistemas. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, J um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f: J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que as derivadas parciais f_{y_i} , com relação às n últimas variáveis são contínuas. Explicitando as variáveis escrevemos $f(t, y)$ onde $y = (y_1, \dots, y_n)$. A equação

$$\dot{y} = f(t, y), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad (3.21)$$

é um modo compacto de escrever o sistema

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, \dots, y_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Uma solução de (3.21) é uma função diferenciável $\phi: I \rightarrow \Omega$ definida em um intervalo aberto $I \subset J$ tal que

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad \text{para todo } t \in I.$$

O problema de valor inicial consiste em, dados $\phi_0 \in \Omega$ e $t_0 \in I$, determinar a solução ϕ de (3.21) tal que $\phi(t_0) = \phi_0$. Um resultado de existência e unicidade análogo ao Teorema 3.1 é válido neste caso, a demonstração sendo formalmente a mesma. Os resultados de extensão das soluções têm formas análogas e demonstrações semelhantes. Deixamos ao leitor a tarefa de percorrer os resultados anteriores para o caso de uma equação e verificar que as demonstrações são válidas para os sistemas (3.21).

Utilizaremos os resultados mencionados acima nos Capítulos 6 e 7. O leitor interessado num exemplo, poderá ver o Exemplo 1 da Seção 6.2.

3.3. Campos Vetoriais e Formas Diferenciais

Um campo vetorial F é uma aplicação $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um aberto Ω do espaço $\mathbb{R}^3$ nele próprio. Geometricamente, imaginamos que a cada ponto (x, y, z) de Ω está ligado um vetor $F(x, y, z)$.

Exemplo 1. Campo gravitacional gerado por uma massa m colocada na origem. Neste caso $\Omega = \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$, e pela Lei da Gravitação Universal de Newton

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{Gmx}{r^3}, -\frac{Gmy}{r^3}, -\frac{Gmz}{r^3} \right), \quad (3.23)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, e G é a constante de gravitação cujo valor é $6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$. A expressão (3.23) nos diz que uma massa unitária colocada no ponto (x, y, z) tem sobre ela uma força de atração dirigida para a origem e inversamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem.

Exemplo 2. Campo central de intensidade diretamente proporcional à distância ao centro de atração. Suponhamos que o centro de atração seja a origem. Então

$$F(x, y, z) = (-kx, -ky, -kz), \quad k = \text{const.}$$

Exemplo 3. O campo determinado pela equação diferencial $y' = f(x, y)$

$$F(x, y) = (1, f(x, y)).$$

Exemplo 4. Seja $V(x, y, z)$ uma função escalar $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto Ω do espaço (x, y, z) . Se V for diferenciável, então o gradiente de V

$$\text{grad } V = (V_x, V_y, V_z)$$

é um campo vetorial. Usa-se também a notação ∇V para representar o gradiente. V_x, V_y e V_z designam as derivadas parciais de V com relação a x, y e z , respectivamente.

Definição. Um campo $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamado *campo gradiente* se existir uma função diferenciável $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{grad } V = F$. O campo escalar V é chamado um *potencial* do campo F , e diz-se também que

F deriva de um potencial. [Vê-se que um mesmo F pode ter vários potenciais, mas dois potenciais de um mesmo campo diferem por uma constante].

Condição Necessária para um campo F ser gradiente. Suponhamos que F seja um campo gradiente e que F seja de classe C^1 (isto é, as componentes $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ de F são funções continuamente diferenciáveis). Temos, pois, que existe $V(x, y, z)$ tal que $V_x = P$, $V_y = Q$ e $V_z = R$. Como F é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} V_{xy} &= P_y, & V_{yx} &= Q_x; & V_{xz} &= P_z \\ V_{zx} &= R_x; & V_{yz} &= Q_z; & V_{zy} &= R_y. \end{aligned}$$

Daí, usando o fato que as 2^{as} derivadas de V são contínuas obtemos

$$P_y = Q_x, \quad P_z = R_x, \quad Q_z = R_y \quad (3.24)$$

que deve ser satisfeita em todos os pontos (x, y, z) de Ω . Então, (3.24) é uma condição necessária para $F = (P, Q, R)$ ser um campo gradiente. Será ela suficiente? A resposta é *não*, em geral; isso se vê no Exemplo 5 adiante, usando o resultado a seguir. Chama-se *campo fechado* àquele que satisfaça à relação (3.24). Nesta nomenclatura, o que estabelecemos acima foi o fato que todo campo gradiente é fechado, e o que perguntamos foi se todo campo fechado seria gradiente; e o que veremos é que não.

Antes de prosseguir, a condição (3.24) expressa o fato de o rotacional de F ser zero. Lembre que o *rotacional* do campo vetorial $F = (P, Q, R)$ é um campo vetorial definido assim

$$\text{rot } F = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \vec{i}(R_y - Q_z) + \vec{j}(P_z - R_x) + \vec{k}(Q_x - P_y),$$

onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são a base canônica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Obviamente, o determinante acima é

apenas formal: é uma regra mnemônica para lembrar a expressão do rotacional.

Proposição 3.12. *Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo gradiente contínuo em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cujo potencial é V . Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ um caminho diferenciável em Ω . Então, a integral de linha de F ao longo do caminho α depende apenas dos pontos inicial e final de α :*

$$\int_{\alpha} F = V(x(b), y(b), z(b)) - V(x(a), y(a), z(a)). \quad (3.25)$$

Demonstração: Por definição

$$\int_{\alpha} F = \int_a^b \langle F(x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle dt \quad (3.26)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto escalar de vetores do $\mathbb{R}^3$. Logo, usando o fato que F é um campo gradiente, vemos que o integrando de (3.26) é

$$\begin{aligned} &V_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + V_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ &+ V_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = \frac{d}{dt}[V(x(t), y(t), z(t))]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Conseqüentemente, (3.25) se obtém de (3.26) e (3.27), usando o Teorema Fundamental do Cálculo. ■

Corolário 3.13. *Se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo gradiente contínuo em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ então*

$$\int_{\alpha} F = 0 \quad (3.28)$$

para qualquer caminho fechado α em Ω .

Observação. Campos de vetores aparecem em Mecânica, como por exemplo, os campos de força. Se F for um campo de força, então a integral (3.26) é definida como sendo o *trabalho* da força F ao longo do caminho α . Observe que ali se está integrando apenas a componente de F sobre a tangente à curva: a componente de F , normal a α , não trabalha. Um campo de força fechado é chamado de *conservativo*. Decorre da Proposição 3.15 a seguir e da Proposição 3.12 que todo campo conservativo de forças em um domínio simplesmente conexo

(veja definição abaixo) é um campo gradiente e que o trabalho ao longo de um caminho depende apenas de seus pontos inicial e final.

Exemplo 5. Seja $\Omega = \{(x, y) : \rho_1^2 < x^2 + y^2 < \rho_2^2\}$, onde $0 < \rho_1 < \rho_2$. O campo vetorial $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.29)$$

satisfaz à condição (3.24). Por outro lado, considere o caminho fechado $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e r fixado entre ρ_1 e ρ_2 . Logo, para o campo vetorial (3.29), o produto escalar (3.27) é

$$\frac{r \sin t}{r^2} \cdot (-r \sin t) + \frac{-r \cos t}{r^2} r \cos t = -1$$

e daí

$$\int_{\alpha} F = -2\pi.$$

Portanto, segue-se do Corolário 3.13 que F não é gradiente.

A noção intuitiva de conjunto simplesmente conexo é a de um conjunto que não contém "buracos". No exemplo 5 acima Ω não é simplesmente conexo.

Definição. Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se qualquer função contínua γ definida no círculo unitário

$$\gamma: \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \Omega,$$

pode ser estendida continuamente ao disco, isto é, existe $\tilde{\gamma}$ contínua

$$\tilde{\gamma}: \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \Omega,$$

tal que $\tilde{\gamma}(x, y) = \gamma(x, y)$ se $x^2 + y^2 = 1$.

Na classe dos abertos simplesmente conexos, a condição (3.24), necessária para um campo F ser gradiente, é também suficiente. Demonstraremos esse resultado apenas para o caso de campos vetoriais planos. Antes, porém, estabeleçamos o seguinte resultado, o qual é a recíproca do Corolário 3.13.

Proposição 3.14. Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tal que (3.28) se verifica. Então F é gradiente.

Demonstração: Fixe um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Dado $(x, y, z) \in \Omega$ existem caminhos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $0 \leq t \leq 1$, em Ω e tais que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $x(1) = x$, $y(1) = y$, $z(1) = z$. A expressão

$$V(x, y, z) = \int_{\alpha} F \quad (3.30)$$

define univocamente V pois, por hipótese, a integral de linha no segundo membro de (3.30) independe de α , dependendo apenas dos pontos inicial e final de α . Para mostrar que V é um potencial para F , tome um caminho α que chega em (x, y, z) paralelamente ao eixo x , isto é, o segmento ligando $(x-h, y, z)$ a (x, y, z) pertence a α . Logo de (3.30) obtemos:

$$V(x, y, z) - V(x-h, y, z) = \int_{x-h}^x P \, dx.$$

Dividindo por h e passando ao limite quando $h \rightarrow 0$, obtemos $V_x = P$. Raciocínio análogo para provar $V_y = Q$ e $V_z = R$. ■

Proposição 3.15. Seja Ω um aberto simplesmente conexo no plano. Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial diferenciável fechado. Então F é gradiente.

Demonstração: Basta mostrar que a condição (3.24) implica (3.28). Sem perda de generalidade podemos supor que α é um caminho fechado simples (isto é, sem intersecções): seja D o aberto delimitado por α . A hipótese de α ser simplesmente conexo implica que a fronteira de D é α . O teorema do divergente nos diz que

$$\int_{\alpha} F = \int_D \operatorname{div}(-Q, P)$$

onde $\operatorname{div}(-Q, P) = -Q_x + P_y$. Portanto, usando a condição (3.24) obtém-se (3.28). ■

Método prático para obtenção do potencial. Suponha que $F = (P, Q): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja um campo diferenciável num domínio simplesmente conexo Ω , e satisfazendo à relação

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (3.24)$$

Pela Proposição 3.15, sabe-se que existe um potencial $V(x, y)$ para F . Como determiná-lo?

Em primeiro lugar, observamos que V deve ser tal que $V_x = P$; logo

$$V(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y) \quad (3.31)$$

onde o primeiro termo no segundo membro de (3.31) é qualquer primitiva de P com relação a x , e g é uma função que determinaremos de modo a atender à outra relação: $V_y = Q$. Para isso, derivando (3.31), obtemos

$$V_y(x, y) = \int P_y(x, y) dx + g'(y)$$

e daí

$$g'(y) = Q(x, y) - \int P_y(x, y) dx. \quad (3.32)$$

Exemplo 6. Seja $F(x, y) = (e^y, xe^y + 2y)$ um campo vetorial definido em todo o $\mathbb{R}^2$. É imediato verificar que este campo satisfaz à condição (3.24); e como está definido em um domínio simplesmente conexo, temos que ele possui um potencial, $V(x, y)$. Logo, como $V_x = e^y$, obtemos

$$V(x, y) = \int e^y dx + g(y) = e^y x + g(y)$$

e daí

$$V_y(x, y) = e^y x + g'(y).$$

Como $V_y = xe^y + 2y$, obtemos que $g'(y) = 2y$. Portanto, podemos tomar $g(y) = y^2$. Concluimos que um potencial para F é

$$V(x, y) = e^y x + y^2.$$

Como motivação para o estudo de Formas Diferenciais, observamos que as equações separáveis,

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

estudadas no Capítulo 2, e as equações da forma

$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0$$

que serão estudadas ainda neste capítulo, são em geral apresentadas como

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (3.33)$$

e

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (3.34)$$

Essas formas evidenciam certas peculiaridades dessas equações e tornam mais automáticos alguns procedimentos de integração. Há, pois, uma vantagem em estudá-las. Entretanto, põe-se imediatamente a questão de saber o que realmente significam as expressões (3.33) e (3.34), uma vez que elas não são equações diferenciais no sentido que até aqui tem sido considerado. Formalmente, a coisa funciona se olharmos dy/dx como o quociente das expressões dy e dx . Um espírito matemático aceitará o formalismo, e tirará vantagens dos procedimentos formais se entender o seu sentido correto e sentir que todos eles podem ser justificados. E é isso que pretendemos fazer nesta seção.

Formas lineares em $\mathbb{R}^2$. Uma forma linear em $\mathbb{R}^2$ é uma função $\ell: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\ell(a\alpha + b\beta) = a\ell(\alpha) + b\ell(\beta) \quad (3.35)$$

onde a e b são números reais e α e β são vetores de $\mathbb{R}^2$. Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \text{onde } e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1). \quad (3.36)$$

De (3.35) e (3.36) decorre então que uma forma linear ℓ fica determinada se conhecermos $\ell(e_1)$ e $\ell(e_2)$, pois

$$\ell(\alpha) = \alpha_1 \ell(e_1) + \alpha_2 \ell(e_2). \quad (3.37)$$

Definamos duas formas lineares especiais e^1 e e^2 pelas relações

$$\begin{aligned} e^1(e_1) &= 1 & e^1(e_2) &= 0 \\ e^2(e_1) &= 0 & e^2(e_2) &= 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A expressão $a_1 e^1 + a_2 e^2$, onde a_1 e a_2 são números reais dados, define uma forma linear: aquela tal que

$$(a_1 e^1 + a_2 e^2)(e_1) = a_1, \quad (a_1 e^1 + a_2 e^2)(e_2) = a_2.$$

E vemos, reciprocamente, que qualquer forma linear ℓ é dessa forma, isto é,

$$\ell = a_1 e^1 + a_2 e^2, \quad \text{onde } a_1 = \ell(e_1) \text{ e } a_2 = \ell(e_2). \quad (3.39)$$

O conjunto das formas lineares é, então, um espaço vetorial de dimensão 2, chamado o *espaço dual* de $\mathbb{R}^2$ e designado por $(\mathbb{R}^2)^*$. Os elementos de $(\mathbb{R}^2)^*$ são chamados de *covetores*. Os covetores e^1 e e^2 formam uma *base* de $(\mathbb{R}^2)^*$.

Formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Uma *forma diferencial* é uma função $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$. Usando (3.39) podemos escrever

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y)e^1 + \omega_2(x, y)e^2 \quad (3.40)$$

onde as funções $\omega_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são as componentes da forma ω . Uma forma é de *classe* C^r , r inteiro ≥ 0 , se as componentes forem funções diferenciáveis até a ordem r . [O que introduzimos aqui foi o conceito de forma diferencial de grau 1, ou 1-forma. Pode-se definir formas diferenciais de grau > 1 , mas para nossos propósitos as 1-formas são suficientes. Por uma questão de economia de linguagem, chamamos essas 1-formas simplesmente de formas]. Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um vetor de $\mathbb{R}^2$, então, decorre de (3.40) que

$$[\omega(x, y)]\alpha = \omega_1(x, y)\alpha_1 + \omega_2(x, y)\alpha_2. \quad (3.41)$$

Exemplos de formas. (i) *Forma constante* é aquela em que as componentes são constantes.

(ii) $dx: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é a forma constante cujas componentes ω_1 e ω_2 são 1 e 0, respectivamente: $dx = 1 \cdot e^1 + 0 \cdot e^2 = e^1$. Assim, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um vetor de $\mathbb{R}^2$, então $(dx)(\alpha) = \alpha_1$.

(iii) $dy: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é a forma constante: $dy = 0 \cdot e^1 + 1 \cdot e^2 = e^2$. Assim $(dy)(\alpha) = \alpha_2$.

Decorre dos exemplos (ii) e (iii) acima e de (3.40) que qualquer forma diferencial ω pode ser expressa como

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy. \quad (3.42)$$

Por definição, somam-se formas definidas em um mesmo aberto Ω somando-se as respectivas componentes. E, também, multiplica-se

uma forma $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ por uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ multiplicando-se as componentes de ω por f .

Definição. Dada uma função diferenciável $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ define-se sua *diferencial* $df: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ como sendo a forma diferencial cujas componentes são $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Assim

$$(df)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (3.43)$$

ou mais compactamente

$$df = f_x dx + f_y dy. \quad (3.44)$$

É imediato verificar-se da definição que

$$\begin{aligned} d(f + g) &= df + dg \\ d(fg) &= fdg + gdf \\ d(c) &= 0, \text{ onde } c = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$df = 0$ implica $f = \text{const}$, se Ω for conexo.

Definições. Uma forma diferencial $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é *exata* se existir $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Compare com a definição de campo gradiente; uma forma é exata se e só se o campo vetorial associado $(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$ for um campo gradiente. Uma forma diferencial é *fechada* se $\partial\omega_1/\partial y = \partial\omega_2/\partial x$; portanto, uma forma diferencial é fechada se e só se o campo vetorial associado é fechado.

Decorre das definições e observações anteriores que

1. Se Ω for simplesmente conexo, uma forma diferencial $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é exata se e só se ela for fechada.

Definição. Dada uma forma diferencial $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ de classe C^0 e um caminho diferenciável $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$, define-se a *integral de ω ao longo de α* por

$$\int_a^b \omega = \int_a^b \omega[\alpha(t)]\alpha'(t) dt$$

onde o integrando da segunda integral tem o sentido explicitado em (3.41) acima. [Portanto, a integral de ω ao longo de α é igual a integral do campo vetorial $(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$, associado a ω , ao longo de α].

Portanto, decorre das Proposições 3.12 e 3.14 que

ii. *Um forma diferencial $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é exata se, e só se, $\int_{\alpha} \omega = 0$, para todos os caminhos fechados α contidos em Ω .*

Volta às equações (3.33) e (3.34). Em primeiro lugar, escrevendo a equação (3.33) como

$$f(x)dx - g(y)dy = 0$$

vê-se que o primeiro membro é uma diferencial exata. De fato, ela pode ser escrita como

$$dF = 0, \quad \text{onde} \quad F(x, y) = \int f(x)dx - \int g(y)dy,$$

e, portanto, as soluções $y(x)$ de (3.33) são dadas por

$$F(x, y(x)) = c$$

em consequência de (3.45) acima.

Quanto à equação (3.34):

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

caso o primeiro membro seja uma diferencial exata, então ela se reduz a

$$dF = 0, \quad \text{onde} \quad F_x = M \text{ e } F_y = N,$$

e daí $F(x, y(x)) = c$.

Caso a diferencial em (3.34) não seja exata, procura-se um fator integrante $\mu(x, y)$, isto é, uma função tal que

$$\mu M dx + \mu N dy$$

seja uma diferencial exata. Vamos estudar as equações do tipo (3.34) com mais detalhes na próxima secção.

3.4. Equações Exatas

Nesta secção consideramos equações diferenciais da forma

$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0, \quad (3.46)$$

onde $M, N: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções definidas em um aberto conexo Ω do plano (x, y) . Supondo que M e N são funções de classe C^1 e $N(x, y) \neq$

0 para todo $(x, y) \in \Omega$, essa equação se reduz ao tipo $y' = f(x, y)$, para a qual já temos uma teoria de existência e unicidade de solução do problema de valor inicial. De fato, nós a utilizaremos no decorrer desta secção.

Dizemos que a equação (3.46) é *exata* se o campo vetorial (M, N) deriva de um potencial $V(x, y)$, isto é, $V_x = M$ e $V_y = N$. Assim, a equação (3.46) pode ser escrita como

$$V_y(x, y)y' + V_x(x, y) = 0. \quad (3.47)$$

Logo, se $y(x)$ for uma solução de (3.46), obtemos de (3.47):

$$\frac{d}{dx} V(x, y(x)) = 0,$$

ou seja, $y(x)$ é solução da equação algébrica

$$V(x, y(x)) = c, \quad (3.48)$$

onde c é uma constante, a qual pode ser obtida se utilizarmos um ponto (x_0, y_0) por onde a solução $y(x)$ passe; assim $c = V(x_0, y_0)$. Isso quer dizer que os gráficos de soluções da equação (3.46), traçados no plano (x, y) , estão contidos nas curvas de nível da função $V(x, y)$.

Observe que a equação (3.46) pode ser exata sem que M e N sejam de classe C^1 . Entretanto, se M e N forem de classe C^1 num domínio simplesmente conexo, a condição para (3.46) ser exata é que $M_y = N_x$, como vimos na secção 3.3.

Uma função $V(x, y)$ tal que (3.48) se verifica para as soluções $y(x)$ da equação (3.46) é chamada uma *integral primeira* para a equação (3.46).

O que provamos acima foi que se (3.46) for exata, então ela possui uma integral primeira. Consequentemente, um método de obtenção de soluções de equações exatas é descobrir uma integral primeira $V(x, y)$.

Exemplo 1. Considere a equação

$$(x^2 + 4y)y' + (2xy + 1) = 0. \quad (3.49)$$

Neste caso $N(x, y) = x^2 + 4y$ e $M(x, y) = 2xy + 1$. Logo $N_x = M_y$ e consequentemente (3.49) é exata. Basta pois determinar o potencial

de (M, N) :

$$V(x, y) = \int (2xy + 1) dx + g(y) = x^2 y + x + g(y)$$

e daí

$$x^2 + 4y = V_y = x^2 + g'(y) \Rightarrow g(y) = 2y^2.$$

Logo $V(x, y) = x^2 y + x + 2y^2$. Portanto, as soluções $y(x)$ de (3.49) satisfazem a

$$x^2 y + x + 2y^2 = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exercício 1. i) Integre as equações

$$(x^2 + 1)y' + 2xy - x^2 = 0 \quad xy' + y = 0.$$

ii) Estude os oito problemas de valor inicial para as equações acima: $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(-1) = 1$ e $y(-1) = -1$.

Exercício 2. Resolva as equações

$$\left(x + \frac{2}{y}\right)y' + y = 0$$

$$(\cos x \sec^2 y)y' - (\sin x \operatorname{tg} y + 1) = 0$$

$$(x + 2y^4)y' + (y - 2x^4) = 0.$$

Observação. A equação

$$xy' - y = 0 \quad (3.50)$$

não é exata. Entretanto, as soluções $y(x)$ desta equação satisfazem à relação $y/x = c$, o que pode ser verificado diretamente. É também imediato que $V(x, y) = y/x$ é um potencial do campo $(-y/x^2, 1/x)$. A equação correspondente a este campo é

$$\frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 0. \quad (3.51)$$

Vê-se que a equação (3.51) é resultado da multiplicação de (3.50) pelo fator $1/x^2$. Este é um exemplo em que uma equação não exata é transformada em uma equação exata pela multiplicação por um certo fator. Quão geral é essa situação? A questão é, então, a existência de um *fator integrante* para a equação (3.46), isto é, uma função $\mu(x, y)$ tal que

$$\mu N y' + \mu M = 0$$

seja uma equação exata, isto é, exista uma função $V(x, y)$ tal que $V_x = \mu M$ e $V_y = \mu N$. No caso em que M e N sejam de classe C^1 , então uma função $\mu(x, y)$ de classe C^1 será um *fator integrante* (lembre Ω é simplesmente conexo) se

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad (3.52)$$

ou seja

$$\frac{1}{\mu}(N\mu_x - M\mu_y) = M_y - N_x. \quad (3.53)$$

Observe que (3.53) é uma equação diferencial parcial, pois envolve derivadas parciais de $\mu(x, y)$. Sua solução nem sempre é fácil. Entretanto, tudo que necessitamos é uma solução particular de (3.53) e não sua solução geral. Em muitas situações, esse problema é bem mais simples, como veremos nos quatro exemplos a seguir.

Exemplo 2. Suponha que $(M_y - N_x)/N$ seja uma função $g(x)$ de x apenas. Então, podemos determinar um fator integrante $\mu(x)$ que é função de x somente; de fato, decorre de (3.53) que μ é solução de

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N},$$

isto é, $\mu = e^{G(x)}$, onde $G(x) = \int g(x) dx$.

Considere o exemplo

$$(x^2 y - x)y' + y = 0.$$

Temos, então, $M(x, y) = y$, $N(x, y) = x^2 y - x$ e

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} = -\frac{2}{x}.$$

Logo

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = -\frac{2}{x}$$

de onde obtemos

$$\mu(x) = x^{-2}.$$

Exemplo 3. Se $(M_y - N_x)/M$ for uma função $f(y)$ de y apenas, então (3.46) tem um fator integrante que é função de y somente. Neste caso, $\mu(y) = e^{-F(y)}$, onde $F(y) = \int f(y) dy$.

Exercício 3. Ache os fatores integrantes das equações abaixo e realize as integrações:

$$(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$$

$$(x^2 - xy)y' + (xy - 1) = 0.$$

Exemplo 4. Se

$$\frac{M_y - N_x}{N_y - M_x}$$

for uma função h de $z = xy$, então (3.46) tem um fator integrante μ que depende de z : $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(z)$. É fácil ver que

$$\tilde{\mu}(z) = e^{H(z)} \quad \text{onde} \quad H(z) = \int h(z) dz.$$

Exercício 4. Encontre o fator integrante de

$$(3x^3y^4 + x)y' + y = 0.$$

Exemplo 5. Se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas de mesmo grau, então $1/(Mx + Ny)$ é um fator integrante para (3.46). Lembre que M é homogênea de grau p se

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p M(x, y) \quad (*)$$

para quaisquer x e y reais e $\lambda > 0$. Derivando (*) com relação a λ e depois fazendo $\lambda = 1$ obtemos

$$pM(x, y) = xM_x(x, y) + yM_y(x, y).$$

A seguir verifique que o campo $(M/(Mx + Ny), N/(Mx + Ny))$ é fechado. O leitor pode indagar do processo que conduziu à descoberta desse fator integrante. Veja a continuação do Exemplo 5 mais adiante.

3.4.1 Um método prático de integração de equações (3.46)

O conhecimento de diferenciais de algumas funções pode ser explorado para integrar equações do tipo (3.46). Começamos propondo ao leitor que verifique as seguintes expressões para as diferenciais de algumas funções

$$(i) \quad d(x^a) = ax^{a-1} dx$$

$$(ii) \quad d(xy) = xdy + ydx$$

$$(iii) \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$(iv) \quad d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$$

$$(v) \quad d\left(\ln \frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

$$(vi) \quad d\left(\arctg \frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. A equação

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0$$

pode ser escrita como

$$x^2y dy - (xdy - ydx) = 0$$

que dividida por x^2 dá

$$ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

Usando i) e iii) temos

$$d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

e daí obtemos a integral primeira

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Exemplo 2. A equação

$$y \, dx + (1 + y^2 - x) \, dy = 0$$

pode ser escrita como

$$y \, dx - x \, dy + (1 + y^2) \, dy = 0$$

que dividida por y^2 produz

$$\frac{y \, dx - x \, dy}{y^2} + y^{-2} \, dy + dy = 0.$$

Usando-se i) e iii) obtemos

$$d\left(\frac{x}{y}\right) + d\left(-\frac{1}{y}\right) + dy = 0$$

e portanto as soluções são dadas por

$$\frac{x}{y} - \frac{1}{y} + y = c.$$

Exercícios. Integre, como nos exemplos acima, as equações

$$y \, dx - (x + xy^3) \, dy = 0$$

$$(y + x^5 + x^3 y^2) \, dx - x \, dy = 0$$

$$x \, dx + y \, dy = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$$

$$(x - y) \, dx + (x + y) \, dy = 0.$$

3.4.2 Existência do Fator Integrante

Mostraremos que se M e N forem de classe C^1 em Ω e se $N(x_0, y_0) \neq 0$ num ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$, então existe um fator integrante numa vizinhança de (x_0, y_0) .

De fato, em virtude da continuidade de $N(x, y)$, existe uma vizinhança Ω_0 de (x_0, y_0) onde $N \neq 0$. Logo a equação (3.46) pode ser escrita como

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (3.54)$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução do problema de valor inicial, a equação (3.54) com condição inicial

$$y(x_0) = \xi, \quad (3.55)$$

onde ξ é tal que $(x_0, \xi) \in \Omega_0$, tem uma solução única

$$y = \phi(x, \xi) \quad (3.56)$$

onde explicitamos na solução a sua dependência da condição inicial ξ .

Suponhamos inicialmente que a equação (3.46) tenha em uma vizinhança de (x_0, y_0) uma integral primeira $u(x, y)$, tal que $u_y(x_0, y_0) \neq 0$. Seja $c_0 = u(x_0, y_0)$. Assim, para c numa vizinhança de c_0 , tem-se que uma solução $\phi(x, \xi)$ de (3.54) com $u(x_0, \xi) = c$ é tal que $u(x, \phi(x, \xi)) = c$. Logo

$$u_x(x, \phi(x, \xi)) + u_y(x, \phi(x, \xi))\phi'(x, \xi) = 0. \quad (3.57)$$

E como

$$M(x, \phi(x, \xi)) + N(x, \phi(x, \xi))\phi'(x, \xi) = 0 \quad (3.58)$$

concluimos que

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{M}{N}$$

numa vizinhança de (x_0, y_0) . Daí se segue que

$$u_x = \frac{u_y}{N} M. \quad (3.59)$$

Logo, $\mu = u_y/N$ é um fator integrante, pois (3.57) é obtida de (3.58) multiplicando-a por μ . E (3.57) é uma equação exata como definimos acima.

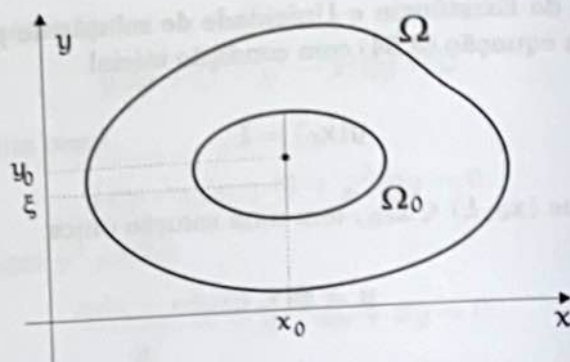


Figura 3.7

A seguir, provamos que a equação (3.46) sempre possui (localmente) uma integral primeira. De (3.56) se segue que

$$\xi = \phi(x_0, \xi) \quad (3.60)$$

a qual derivada com relação a ξ nos dá

$$\frac{d\phi}{d\xi}(x_0, \xi) = 1.$$

[A bem da verdade, neste ponto estamos utilizando o fato que a solução de um certo P.V.I. é diferenciável com relação ao dado inicial. A demonstração desse fato foge um pouco ao caráter elementar de nosso estudo. O leitor insatisfeito pode consultar, por exemplo, J. Sotomayor, Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, 1979.] Daí, concluímos, que usando o Teorema das Funções Implícitas, que ξ pode ser explicitada na equação (3.56):

$$\xi = \psi(x, y) \quad (3.61)$$

o que é válido numa vizinhança de (x_0, y_0) . De (3.56) e (3.61)

$$y = \phi(x, \psi(x, y)) \quad (3.62)$$

para todo (x, y) numa vizinhança de (x_0, y_0) . Logo derivando (3.62) com relação a y obtemos

$$1 = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.63)$$

o que implica $\psi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Logo $\psi(x, y)$ é uma integral primeira da equação (3.46). Observe que o gráfico da solução $\phi(x, \xi)$ está contido na curva de nível $\psi(x, y) = \xi$.

Comentário. O que acabamos de mostrar foi a existência local de um fator integrante. Observe entretanto que a expressão do fator integrante, $\mu = \psi_y/N$, não é útil, em geral, para efetivamente se obter o fator integrante, pois ela envolve, via (3.56) e (3.61), a resolução da equação diferencial (3.46). Ora, a utilidade do fator integrante é precisamente para resolver essa equação. Portanto, embora saibamos que as equações (3.46) têm um fator integrante, o método do fator integrante é de aplicação restrita, pois, em geral, não conhecemos quem ele é. O método do fator integrante é útil nos casos dos Exemplos 2, 3 e 4 da seção 3.4 acima. Já no caso do Exemplo 5, da referida seção, o método de redução a uma equação separável é bem mais natural.

Exemplo 5 (Continuação). A equação (3.46), no caso de M e N serem funções homogêneas do mesmo grau, pode ser transformada numa equação separável e, então, integrada explicitamente, veja Exercício 7 do Capítulo 2. Basta introduzir uma nova variável dependente $z = y/x$. Daí $y' = xz' + z$, que substituído em (3.46) dá, após usar a homogeneidade:

$$N(1, z)(xz' + z) + M(1, z) = 0$$

ou seja

$$\frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} z' + \frac{1}{x} = 0. \quad (3.64)$$

Supomos que $x_0 M(x_0, y_0) + y_0 N(x_0, y_0) \neq 0$ e $x_0 > 0$. Integrando (3.64) e voltando à variável y :

$$F\left(\frac{y}{x}\right) + \ln x = c \quad (3.65)$$

onde $F(z)$ é uma primitiva da função coeficiente de z' em (3.64). Logo, a função no primeiro membro de (3.65) é uma integral primeira de

(3.46). Pelo que vimos antes, então, o fator integrante procurado é

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} F\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{N(x, y)} \frac{N(1, y/x)}{M(1, y/x) + (y/x)N(1, y/x)} \frac{1}{x}\end{aligned}$$

de onde se segue, em vista da homogeneidade, que

$$\mu(x, y) = \frac{1}{Mx + Ny}$$

como queríamos provar.

3.5. Famílias de Curvas Planas

As soluções y das equações exatas

$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0 \quad (3.66)$$

foram obtidas na forma implícita

$$V(x, y) = c, \quad (3.67)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para cada valor de c temos uma curva no plano (x, y) . Por exemplo, as soluções de $yy' + x = 0$ são dadas na forma

$$x^2 + y^2 = c,$$

assim para cada valor de $c > 0$ temos um círculo de raio $\sqrt{c}$ centrado na origem. Observe, pois, que, para um mesmo c , podemos ter mais de uma solução $y(x)$ dada por (3.67). A expressão define uma família de curvas a um parâmetro. Em geral, uma família de curvas a um parâmetro é definida por

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad (3.68)$$

onde $f: \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, Ω é um aberto do plano (x, y) e Λ é um intervalo da reta.

Põe-se a seguinte questão: dada uma família de curvas (3.68) a um parâmetro, existe uma equação diferencial para a qual essa família represente suas soluções?

Iniciemos com o estudo de exemplos.

Exemplo 1. Família de retas paralelas a uma reta dada:

$$f(x, y, \lambda) \equiv y - mx - \lambda = 0 \quad (3.69)$$

onde m está dado, $\lambda \in \Lambda \equiv \mathbb{R}$, $(x, y) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^2$. Derivando (3.69) com relação a x obtemos

$$y' = m$$

e é essa a equação cuja família de soluções é dada por (3.69).

Exemplo 2. Família de parábolas

$$f(x, y, \lambda) \equiv y - 2\lambda x^2 - \lambda = 0; \quad (3.70)$$

onde $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Derivando com relação a x obtemos

$$y' - 4\lambda x = 0. \quad (3.71)$$

Eliminando λ entre (3.70) e (3.71) obtemos

$$(2x^2 + 1)y' - 4xy = 0$$

que é a equação cujas soluções são dadas por (3.70).

Exemplo 3. Família de círculos de raio 1 centrados no eixo- x

$$x = \lambda + \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

que pode ser escrita implicitamente como

$$f(x, y, \lambda) \equiv (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (3.72)$$

Derivando com relação a x , obtemos

$$2(x - \lambda) + 2yy' = 0. \quad (3.73)$$

Eliminando λ entre (3.72) e (3.73), temos

$$y^2(1 + y'^2) - 1 = 0. \quad (3.74)$$

Como nos casos anteriores, as curvas (3.72) são soluções de (3.74). Entretanto neste caso, há soluções que não estão incorporadas em (3.72): de fato $y(x) \equiv 1$ e $y(x) \equiv -1$ são outras duas soluções de (3.74). A terminologia clássica é a seguinte: as soluções (3.72) são chamadas *regulares* e $y(x) \equiv 1$ e $y(x) \equiv -1$ são chamadas *soluções singulares*. Observe que essas duas últimas soluções são as envoltórias da

família de círculos; logo mais, definiremos envoltória e voltaremos a esta discussão.

Exemplo 4. Família arbitrária de retas da forma $y = \lambda x + g(\lambda)$, $\lambda > 0$. Neste caso

$$f(x, y, \lambda) \equiv y - \lambda x - g(\lambda) = 0 \quad (3.75)$$

onde supomos que g é uma função de classe C^2 . Derivando com relação a x :

$$y' - \lambda = 0. \quad (3.76)$$

Eliminando entre (3.75) e (3.76) obtemos

$$y - xy' - g(y') = 0. \quad (3.77)$$

A equação (3.77) é conhecida como equação de Clairaut. Como nos casos anteriores, as curvas (3.75) são soluções de (3.77). Entretanto há uma outra: a curva dada em coordenadas paramétricas por

$$x = -g'(\lambda), \quad y = -\lambda g'(\lambda) + g(\lambda). \quad (3.78)$$

Para verificar essa assertiva basta provar que $dy/dx = \lambda$. Como veremos mais adiante, a curva (3.78) é a envoltória da família (3.75).

Exemplo 5. Família de Círculos

$$f(x, y, \lambda) \equiv (x - 2\lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0. \quad (3.79)$$

Derivando com relação a x obtemos

$$2(x - 2\lambda) + 2yy' = 0. \quad (3.80)$$

Eliminando λ entre (3.79) e (3.80) temos

$$3y^2(y')^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0. \quad (3.81)$$

Como antes, as curvas (3.79) são soluções de (3.81), bem como a envoltória da família (3.79) dada por $y^2 = \frac{1}{3}x^2$.

Método utilizado nos exemplos acima

Dada a família de curvas (3.68), derivamos f com relação a x , e formamos o sistema

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 0 \\ f_x(x, y, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

de onde eliminamos λ . Usando o Teorema das Funções Implícitas vê-se que a condição

$$f_\lambda(x, y, \lambda) \neq 0 \quad (3.83)$$

possibilita a explicitação de λ em (3.68): $\lambda = \phi(x, y)$; substituindo-se essa expressão de λ em (3.82) obtemos a equação diferencial procurada.

Exercício 1. Obtenha as equações diferenciais correspondentes às famílias de curvas:

(i) $y = \lambda e^{\lambda x}$

(ii) $y = \lambda x + \sin(\lambda^2 + 1)$

(iii) $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{1-\lambda^2} = 1$

(iv) Família de todas as retas passando pelo ponto (a, b)

(v) Família de todas as retas cujo segmento compreendido entre os dois eixos é sempre igual a 1.

3.5.1 Envoltória de uma família de curvas

Seja dada uma família de curvas C_λ dada por (3.68); supomos que, para cada λ , a curva correspondente tem tangente, o que quer dizer que o vetor normal

$$(f_x(x, y, \lambda), f_y(x, y, \lambda)) \neq 0 \quad (3.84)$$

para todos (x, y, λ) tais que $f(x, y, \lambda) = 0$. Define-se uma *envoltória da família* (3.68) como sendo uma curva em coordenadas paramétricas $(x(\lambda), y(\lambda))$ tal que

$$f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \quad (3.85)$$

$$\dot{x}(\lambda) f_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + \dot{y}(\lambda) f_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \quad (3.86)$$

onde $\dot{x} = dx/d\lambda$. A condição (3.85) diz que para cada λ , o ponto $(x(\lambda), y(\lambda))$ pertence à curva C_λ da família (3.68). A condição (3.86) diz que naquele ponto a envoltória e a curva C_λ têm a mesma reta tangente. A seguinte condição é suficiente para a existência de envoltória da família (3.68)

$$f_x f_{\lambda y} - f_y f_{\lambda x} \neq 0. \quad (3.87)$$

De fato, considere o sistema

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

A condição (3.87) nos garante através do Teorema das Funções Implícitas que existe uma solução $(x(\lambda), y(\lambda))$ desse sistema. Logo esses $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ satisfazem (3.85), que derivada com relação a λ produz

$$\begin{aligned} \dot{x}(\lambda)f_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + \\ + \dot{y}(\lambda)f_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + f_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Em virtude de (3.88) o último termo de (3.89) é zero e portanto (3.89) implica (3.86), o que mostra que $(x(\lambda), y(\lambda))$ é uma envoltória da família C_λ .

Determinação de envoltórias de algumas famílias de curvas

1. A família do Exemplo 3:

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &\equiv (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &\equiv -2(x - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Eliminando λ nesse sistema obtemos $y^2 = 1$, o que mostra que $y(x) \equiv 1$ e $y(x) \equiv -1$ são duas envoltórias.

2. A família do Exemplo 4:

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &\equiv y - \lambda x - g(\lambda) = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &\equiv -x - g'(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Logo, a curva em coordenadas paramétricas,

$$x = -g'(\lambda), \quad y = -\lambda g'(\lambda) + g(\lambda),$$

é uma envoltória.

A família do Exemplo 5:

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &\equiv (x - 2\lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &\equiv -4(x - 2\lambda) - 2\lambda = 0. \end{aligned}$$

Eliminando λ no sistema acima obtemos $y^2 = \frac{1}{3}x^2$. Logo as retas $y = x/\sqrt{3}$ e $y = -x/\sqrt{3}$ são envoltórias.

4. Generalização do Exemplo 4. Sejam $g: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $v: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções diferenciáveis, com $|v(\lambda)| = 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Considere a família de retas $g(\lambda) + tv(\lambda)$:

$$x = g_1(\lambda) + tv_1(\lambda), \quad y = g_2(\lambda) + tv_2(\lambda), \quad (3.90)$$

onde $g = (g_1, g_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

Se $v_1(\lambda) \neq 0$, essa família pode ser escrita na forma (3.75). De fato, eliminado t em (3.90), obtemos

$$[y - g_2(\lambda)]v_1(\lambda) = [x - g_1(\lambda)]v_2(\lambda)$$

e daí

$$y = \frac{v_2(\lambda)}{v_1(\lambda)}x + g_2(\lambda) - \frac{v_2(\lambda)}{v_1(\lambda)}g_1(\lambda). \quad (3.91)$$

Agora λ pode ser explicitado em $v_2(\lambda)/v_1(\lambda) = c$ se $v_1v_2' - v_2v_1' \neq 0$, o que decorre de $|v(\lambda)|^2 = 1$. Daí (3.91) se escreve na forma (3.75).

O problema pode ser tratado sem reduzir ao Exemplo 4 do seguinte modo: provaremos, inicialmente, que a família (3.90) tem uma envoltória se e só se existirem funções diferenciáveis $\phi(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ tais que

$$g'(\lambda) + \phi(\lambda)v'(\lambda) + \psi(\lambda)v(\lambda) = 0. \quad (3.92)$$

De fato, se $\alpha(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ for uma envoltória, temos

$$\alpha(\lambda) = g(\lambda) + t(\lambda)v(\lambda)$$

e daí

$$\alpha'(\lambda) = g'(\lambda) + t'(\lambda)v(\lambda) + t(\lambda)v'(\lambda)$$

e como $\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda)v(\lambda)$ para algum $\alpha(\lambda)$, (isso é a condição de que as retas tangentes à envoltória e à curva C_λ são as mesmas), obtemos a expressão (3.92) com $\phi(\lambda) = t(\lambda)$ e $\psi(\lambda) = t'(\lambda) - \alpha(\lambda)$. Por outro lado, se (3.92) se verifica, considere a curva $\alpha(\lambda) = g(\lambda) + \phi(\lambda)v(\lambda)$ e provemos que ela é uma envoltória. Basta calcular α' e usar (3.92) para mostrar que $\alpha'(\lambda) = (\phi'(\lambda) - \psi(\lambda))v(\lambda)$.

3.5.2. Trajetórias ortogonais

Duas curvas dadas por $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$ que se interseccionam no ponto (x_0, y_0) são ortogonais se suas retas tangentes naquele ponto são perpendiculares, isto é,

$$\phi'(x_0)\psi'(x_0) = -1, \quad (3.93)$$

onde supomos que ψ' e ϕ' não se anulam. Se as curvas são dadas em coordenadas paramétricas, isto é, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ são as curvas, então (3.93) toma a forma

$$\alpha'_1(t_0)\beta'_1(t_0) + \alpha'_2(t_0)\beta'_2(t_0) = 0.$$

Duas famílias de curvas

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{e} \quad g(x, y, \mu) = 0$$

são mutuamente ortogonais se cada λ -curva é ortogonal a toda μ -curva que ela intersecciona.

Dada uma família de curvas

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad (3.94)$$

um modo de obter uma outra família a ela ortogonal é o seguinte. Pelos métodos anteriores, obtenha inicialmente a equação diferencial para a qual essas curvas são soluções:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (3.95)$$

A seguir defina a função

$$G(x, y, p) = F\left(x, y, -\frac{1}{p}\right) \quad (3.96)$$

e obtenha as soluções da equação diferencial:

$$G(x, y, y') = 0. \quad (3.97)$$

Essas soluções constituem uma família de curvas

$$g(x, y, \mu) = 0 \quad (3.98)$$

que é ortogonal à família f . De fato, se $y = \phi(x)$ é uma μ -curva então

$$F\left(x, \phi(x), -\frac{1}{\phi'(x)}\right) = 0$$

o que quer dizer que se $y = \psi(x)$ é a λ -curva que passa pelo ponto $(x, \phi(x))$, então

$$\psi'(x) = -\frac{1}{\phi'(x)}$$

ou seja (3.93) está satisfeita.

Exemplo 6. Considere a família de círculos

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0. \quad (3.99)$$

A equação diferencial cujas soluções são dadas por (3.99) é

$$yy' + x = 0.$$

Para obter a família ortogonal a (3.99) considere a equação

$$-y\frac{1}{y'} + x = 0$$

cujas soluções são $y = \mu x$. Portanto, as retas através da origem formam uma família ortogonal à família de círculos (3.99).

Exemplo 7. Considere a família de parábolas

$$y - 2\lambda x^2 - \lambda = 0. \quad (3.100)$$

A equação diferencial correspondente é

$$(2x^2 + 1)y' - 4xy = 0.$$

Para obter a família ortogonal a (3.100) considere a equação

$$-(2x^2 + 1)\frac{1}{y'} - 4xy = 0,$$

cujas soluções são

$$2y^2 - x^2 - \ln|x| = \mu.$$

Essa é a família ortogonal a (3.100).

Exercício 2. Determine famílias ortogonais às seguintes famílias de curvas

$$(i) \ y = \lambda x^n \quad (ii) \ x^3 - 3xy^2 = \lambda \quad (iii) \ y = \ln(\lambda x).$$

Exercício 3. (a) Mostre que a expressão

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \quad a > b > 0$$

define: (i) uma família de elipses cofocais (i.e., todas as elipses têm os mesmos focos) se $\lambda > -b^2$; (ii) uma família de hipérboles cofocais se $-a^2 < \lambda < -b^2$. (O que ocorre se $\lambda < -a^2$?)

(b) Mostre que a equação diferencial correspondente a essas famílias de curvas é:

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy} y' - 1 = 0.$$

(c) Observando que a equação diferencial é invariante pela mudança de y' por $-1/y'$, conclua que a família de curvas para $\lambda > -a^2$ é auto-ortogonal (sentido óbvio!).

(d) Mostre que a família (i) é ortogonal à família (ii).

Exercício 4. Uma família de curvas (3.98) interseccionando uma outra família (3.94) com um ângulo fixo θ é chamada de *família isogonal* com (3.94). Se (3.95) é a equação diferencial correspondente à família (3.94) mostre que a equação diferencial correspondente a (3.98) é

$$F\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg} \theta}{1 + y' \operatorname{tg} \theta}\right) = 0.$$

4

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

As equações ordinárias, em particular, as equações de segunda ordem nasceram juntos com a Mecânica. Visando formular problemas relevantes, desenvolveremos nas aplicações um pouco da dinâmica de uma partícula, do oscilador harmônico e dos campos centrais de forças. Assim, para nós, a solução de um problema não é apenas uma fórmula ou uma função, mas antes, algo pleno de significado e de informações sobre o fenômeno que estamos considerando. Por outro lado, para uma análise adequada de problemas aplicados é imprescindível ter um conhecimento matemático adequado para estudá-los. Desenvolvemos essa matemática nas duas primeiras seções e dedicamos as demais às aplicações. É animador sentir que problemas relevantes e difíceis recebem um tratamento simples e completo com as ferramentas matemáticas aqui introduzidas. Segundo A. Engel, a matemática deve ser ensinada como uma ciência fundamental, que fornece os meios indispensáveis de raciocinar e técnicas para tratar com o mundo real: "o mundo físico e o mundo criado pelo homem".

4.1. Equações Lineares de Segunda Ordem

Sejam $p, q, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo aberto (a, b) , o qual em muitos problemas é a semireta $t > 0$ ou toda a reta $-\infty < t < \infty$. Consideremos a equação linear de 2ª ordem

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (4.1)$$

ou mais compactamente, como escreveremos quase sempre;

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f. \quad (4.2)$$