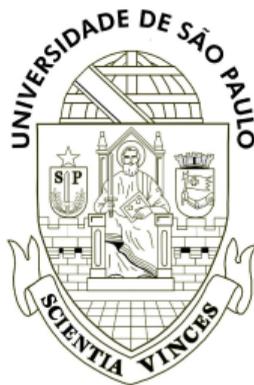


# Física 1 (4310145) - Aula 21/05/2020



## ● Capítulo 2

- Perguntas: Todas!
- Problemas: 2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 2.14, 2.17, 2.21, 2.31, 2.37, 2.41, 2.67, 2.69

## ● Capítulo 3

- Perguntas: 3.1, 3.3, 3.5, 3.12, 3.13
- Problemas: 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.9, 3.10, 3.15, 3.32, 3.27, 3.33, 3.37, 3.43

## ● Capítulo 4

- Perguntas: 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.13, 4.17
- Problemas: 4.1, 4.3, 4.7, 4.9, 4.11, 4.19, 4.25, 4.29, 4.47, 4.57, 4.65, 4.69

## ● Capítulo 5

- Perguntas: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.9
- Problemas: 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7, 5.11, 5.13, 5.15, 5.19, 5.21, 5.31, 5.35, 5.45, 5.63

## ● Capítulo 6

- Perguntas: 6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.9, 6.13
- Problemas: 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.13, 6.19, 6.25, 6.33, 6.39, 6.41, 6.43, 6.57, 6.59

## ● Capítulo 7

- Perguntas: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.9, 7.11
- Problemas: 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.15, 7.17, 7.21, 7.23, 7.31, 7.37, 7.41, 7.43, 7.45, 7.49, 7.67

## ● Capítulo 8

- Perguntas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.9, 8.11
- Problemas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.7, 8.9, 8.13, 8.15, 8.19, 8.25, 8.37, 8.39, 8.41, 8.45, 8.47, 8.53, 8.57, 8.67

## ● Capítulo 9

- Perguntas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.9, 9.11
- Problemas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.11, 9.13, 9.17, 9.19, 9.25, 9.29, 9.33, 9.37, 9.39, 9.41, 9.45, 9.49, 9.51, 9.55, 9.61, 9.63, 9.73, 9.75

## ● Capítulo 10

- Perguntas:
- Problemas:

## ● Capítulo 11

- Perguntas:
- Problemas:

- 1 Centro de Massa e Momento Linear
  - Colisões elásticas em uma dimensão
  - Colisões em duas dimensões
  - Sistemas de Massa Variável

- 1 Centro de Massa e Momento Linear
  - Colisões elásticas em uma dimensão
  - Colisões em duas dimensões
  - Sistemas de Massa Variável

- 1 Centro de Massa e Momento Linear
  - Colisões elásticas em uma dimensão
  - Colisões em duas dimensões
  - Sistemas de Massa Variável

# Colisões elásticas em uma dimensão

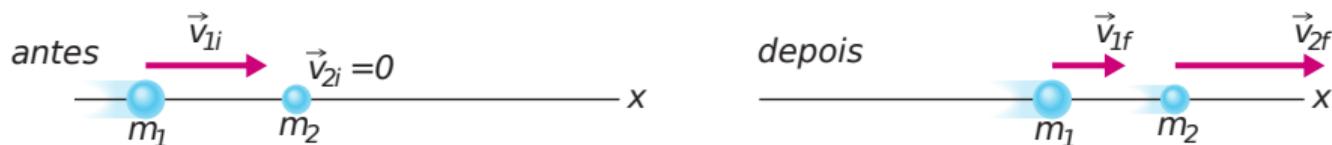
- Em geral, as colisões que acontecem no mundo macroscópico são inelásticas
- Porém, podemos supor que algumas são aproximadamente elásticas

$$K_i = K_f$$

## Colisão elástica

Nas colisões elásticas, a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode variar, mas a energia cinética total do sistema permanece a mesma.

- Considere a situação abaixo



- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \Longrightarrow \quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

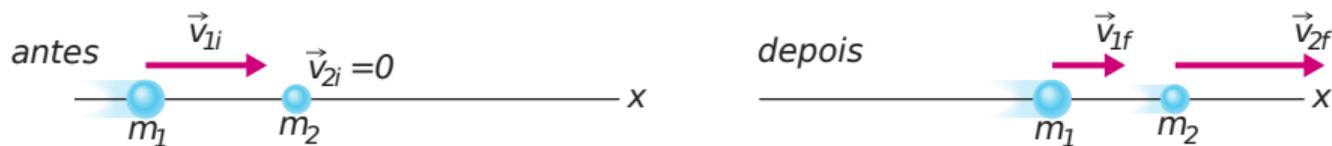
- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$E_i = E_f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

# Alvo Estacionário

## Colisões elásticas em uma dimensão

- Considere a situação abaixo



- Podemos reescrever as equações anteriores como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2v_{2f} \quad (1)$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2v_{2f}^2 \quad (2)$$

- Podemos escrever a Eq.(2)

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2v_{2f}^2 \quad (3)$$

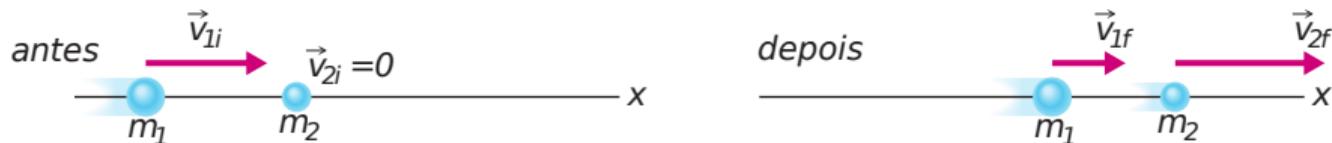
- Dividindo a Eq.(3) pela Eq.(1) obtemos

$$\boxed{v_{1i} + v_{1f} = v_{2f}} \quad (4)$$

# Alvo Estacionário

## Colisões elásticas em uma dimensão

- Considere a situação abaixo



- Isolando  $v_{2f}$  na Eq. (4) do slide anterior, e substituindo na Eq.(1), obtemos

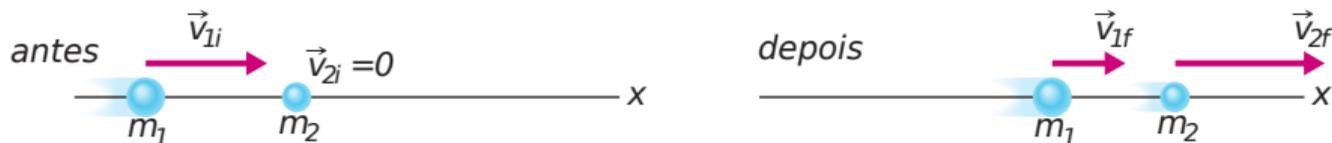
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (5)$$

- Isolando  $v_{1f}$  na Eq. (4) do slide anterior, e substituindo na Eq.(1), obtemos

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

# Alvo Estacionário

## Colisões elásticas em uma dimensão



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

- Massas iguais ( $m_1 = m_2$ ):

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

- Alvo pesado ( $m_2 \gg m_1$ ):

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left( \frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1i}$$

- Projétil pesado ( $m_1 \gg m_2$ ):

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

# Alvo em movimento

## Colisões elásticas em uma dimensão



- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \quad (6)$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \quad (7)$$

# Alvo em movimento

## Colisões elásticas em uma dimensão



- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f}) \quad (8)$$

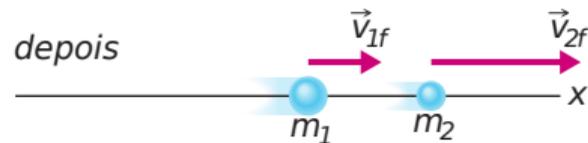
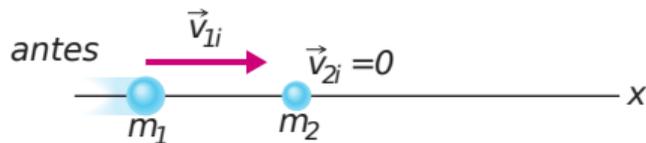
- Isolando  $v_{2f}$  na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (9)$$

- Isolando  $v_{1f}$  na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (10)$$

Qual é o momento linear final do alvo da figura se o momento linear inicial do projétil é  $6\text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e o momento linear final do projétil é (a)  $2\text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e (b)  $-2\text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ? (c) Qual é a energia cinética final do alvo se as energias cinéticas inicial e final do projétil são, respectivamente,  $5\text{ J}$  e  $2\text{ J}$ ?



- 1 Centro de Massa e Momento Linear
  - Colisões elásticas em uma dimensão
  - Colisões em duas dimensões
  - Sistemas de Massa Variável

# Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad (11)$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

- Eq. (1) com relação ao eixo  $x$

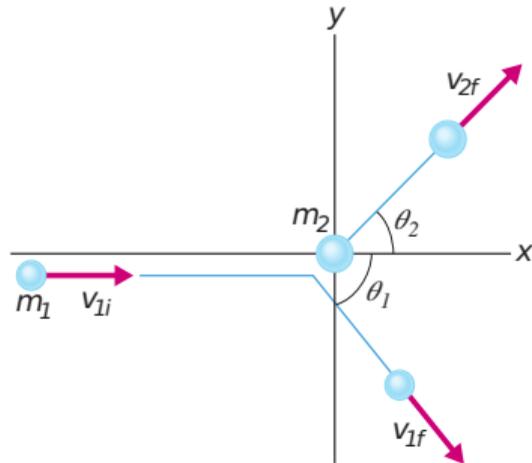
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

- Eq. (1) com relação ao eixo  $y$

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2$$

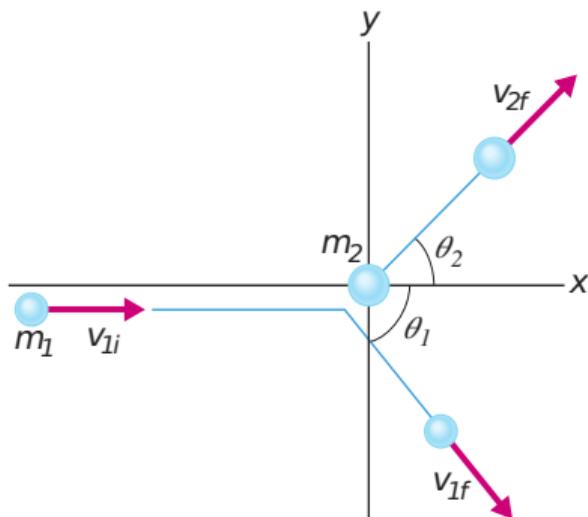
- Para Eq. (2)

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$



# Teste

Suponha que, na situação da figura abaixo, o projétil tem um momento inicial de  $6\text{kg} \cdot \text{m/s}$ , uma componente  $x$  do momento final de  $4\text{kg} \cdot \text{m/s}$  e uma componente  $y$  do momento final de  $-3\text{kg} \cdot \text{m/s}$ . Determine (a) a componente  $x$  do momento final do alvo e (b) a componente  $y$  do momento final do alvo.

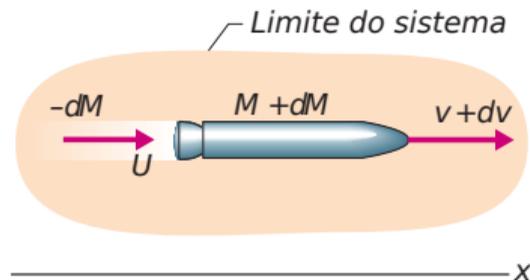
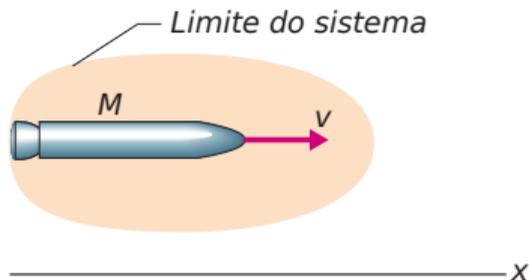


- 1 Centro de Massa e Momento Linear
  - Colisões elásticas em uma dimensão
  - Colisões em duas dimensões
  - Sistemas de Massa Variável

# Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

## Calculo da aceleração

- Temos de aplicar a segunda Lei de Newton ao conjunto formado pelo foguete e pelo produtos rejeitados. A massa desse sistema não varia com o tempo!



- Conservação do momento implica que

$$P_i = P_f \quad \Longrightarrow \quad Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv) \quad (12)$$

- Velocidade Relativa

$$v_{fr} = v_{fp} + v_{pr} \quad \Longrightarrow \quad (v + dv) = v_{\text{rel}} + U \quad \Longrightarrow \quad U = v + dv - v_{\text{rel}} \quad (13)$$

- Substituindo  $U$  na Eq. (2), obtemos

$$-dM v_{\text{rel}} = M dv \quad \xrightarrow{\div dt} \quad -\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

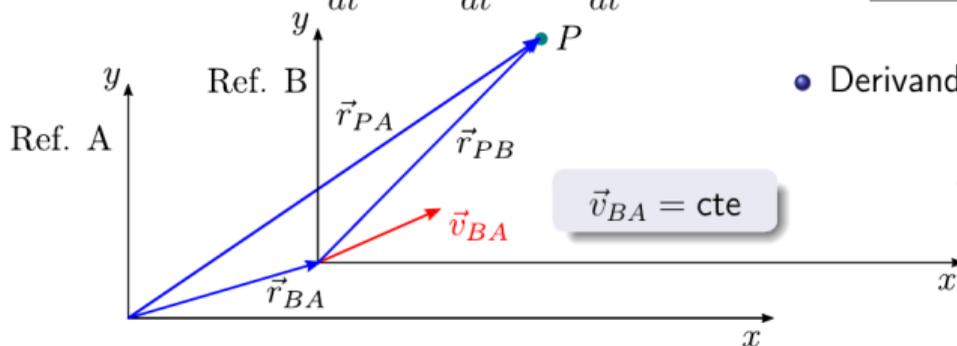
### Movimento relativo em duas dimensões

- A coordenada  $\vec{r}_{PA}$  de  $P$  medida por  $A$  pode ser escrita como

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \quad (3)$$

- Derivando Eq. (3) em relação a  $t$

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (4)$$

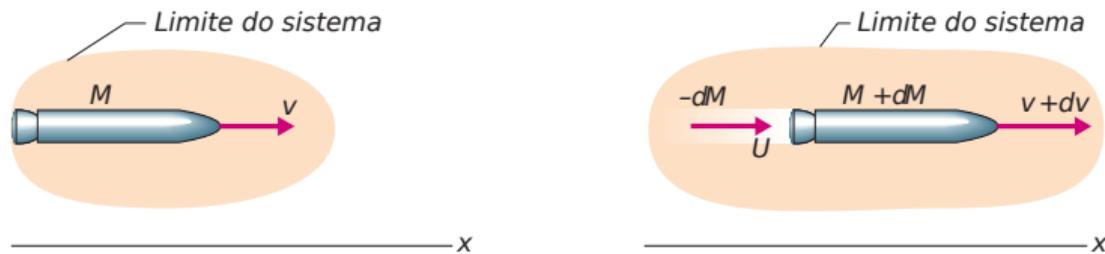


- Derivando Eq. (2) em relação a  $t$

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

# Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

## Calculo da aceleração



- Até aqui vimos que

$$-\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt}$$

- Note que

$$\frac{dM}{dt} \rightarrow \text{taxa com a qual o foguete perde massa} \implies \frac{dM}{dt} = -R$$

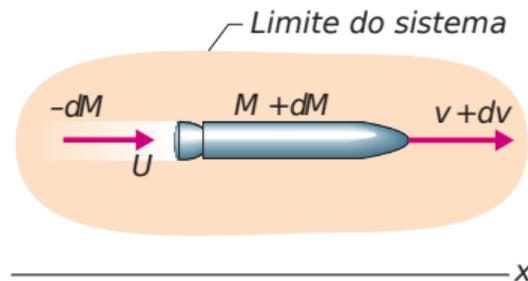
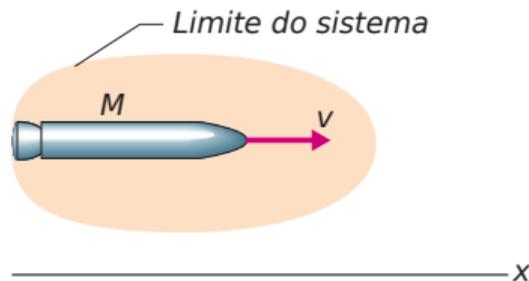
- Podemos escrever

$$R v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt}$$

- Empuxo do motor ( $T$ ):  $T = R v_{\text{rel}}$

# Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

## Cálculo da Velocidade



- Da Eq. (4) (slide 15/19), temos

$$-dM v_{\text{rel}} = M dv \implies dv = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{M}$$

- Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \implies \boxed{v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f}}$$

## Exemplo: Empuxo e aceleração de um foguete

Um foguete cuja massa inicial  $M_i$  é 850kg consome combustível a uma taxa  $R = 2,3\text{kg/s}$ . A velocidade  $v_{\text{rel}}$  dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800m/s. (a) Qual é o empuxo do motor? (b) Qual é a aceleração inicial do foguete?

- O empuxo é calculado como

$$\begin{aligned} T &= Rv_{\text{rel}} = (2,3\text{kg/s})(2800\text{m/s}) \\ &= 6440\text{N} \approx 6400\text{N} \end{aligned}$$

- À medida que o combustível é consumido,  $M$  diminui e  $a$  aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de  $a$ , usamos o valor inicial da massa,  $M_i$

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440\text{N}}{850\text{kg}} = 7,6\text{m/s}^2$$

- Reproduza as passagens de maneira independente!
- Estude as referências!
  - D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física - Mecânica*, volume 1. LTC, 10 edition, 2016
  - P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para Cientistas e Engenheiros*, volume 1. LTC, 10 edition, 2009
  - H.M. Nussenzveig. *Curso de física básica, 1: mecânica*. E. Blucher, 2013
  - H.D. Young, R.A. Freedman, F.W. Sears, and M.W. Zemansky. *Sears e Zemansky física I: mecânica*
  - M. Alonso and E.J. Finn. *Física: Um curso universitário - Mecânica*. Editora Blucher, 2018
  - R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Lições de Física de Feynman*. Bookman, 2008

