Lista 6
Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Os exercícios dessa lista foram retirados do livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1*, *Hamilton Luiz Guidorizzi*, *5ª edição*. Serão indicadas as seções de onde cada exercício foi retirado, mas as numerações não serão as mesmas.

É necessário justificar as passagens na solução dos exercícios abaixo.

Capítulo 5

Exercício 1. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

Exercício 2. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

Exercício 3. Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma raiz real.

Exercício 4. Prove que cada um dos conjuntos abaixo admite máximo e mínimo.

(a) $A = \left\{ \dfrac{x}{1+x^2} : -2 \leq x \leq 2 \right\}$

(b) $A = \left\{ \dfrac{x^2+x}{1+x^2} : -1 \leq x \leq 1 \right\}$

Seção 6.1

Exercício 5. Calcule.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} (0,13)^x$

(e) $\lim_{x\to\infty}[2^x - 3^x]$

(f) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2^x}{1-3^x}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} 2^{-x}$

(h) $\lim_{x\to-\infty}[2^x + 2^{-x}]$

Exercício 6. Esboce o gráfico.

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $g(x) = (0,12)^x$

(c) $f(x) = e^{-x}$

(d) $f(x) = -e^{-x}$

(e) $g(x) = 1 - e^{-x}$

(f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(g) $g(x) = e^{-x^2}$

Seção 6.2

Exercício 7. Calcule.

(a) $\lim_{x\to\infty} \log_3 x$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

(d) $\lim_{x\to\infty} \ln \dfrac{x}{x+1}$

(e) $\lim_{x\to\infty}[\ln(2x+1) - \ln(x+3)]$

(f) $\lim_{x\to 1} \ln \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(g) $\lim_{x\to\infty}[x\ln 2 - \ln(3^x+1)]$

Seção 6.3

Exercício 8. Calcule.

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}$

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

(d) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{x}$

(e) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

Exercício 9. Calcule.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{5^{x}-1}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{x}-1}{x^2}$

Seção 7.2

Exercício 10. Seja $f(x)=x^2+1$. Calcule

(a) $f'(1)$

(b) $f'(0)$

(c) $f'(x)$

Exercício 11. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

(a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$.

(d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$.

Exercício 12. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

Seção 7.3

Exercício 13. Calcule $g'(x)$, sendo g dada por

(a) $g(x) = x^6$

(b) $g(x) = x^{100}$

(c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$

(e) $g(x) = x$

(f) $g(x) = x^{-3}$

(g) $g(x) = \sqrt[6]{x}$

(h) $g(x) = \sqrt[9]{x}$

Seção 7.4

Exercício 14. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

Exercício 15. Calcule $f'(x)$.

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = \pi^x$

(c) $f(x) = \log_3 x$

(d) $f(x) = \log_\pi x$

Seção 7.5

Exercício 16. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no ponto de abscissa 0.

Exercício 17. Seja $f(x) = \operatorname{cotan} x$. Calcule

(a) $f'(x)$

(b) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Seção 7.6

Exercício 18. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) f é derivável em 0?

(b) f é contínua em 0?

Exercício 19. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x < 3 \\ x-3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) f é derivável em 3?

(b) f é contínua em 3?

Seção 7.7

Exercício 20. Calcule $f'(x)$.

(a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

(b) $3x + \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

Exercício 21. Seja $g(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, g(1))$.

Exercício 22. Calcule $F'(x)$, onde $F(x)$ é igual a

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}$

(b) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

(c) $\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^3+2}$

(d) $\dfrac{x+\sqrt[4]{x}}{x^2+3}$

Exercício 23. Calcule $f'(x)$ onde $f(x)$ é igual a

(a) $\dfrac{\cos x}{x^2+1}$

(b) $x^2 \tan x$

(c) $\dfrac{3}{\text{sen } x + \cos x}$

(d) $\cos x + (x^2+1)\,\text{sen } x$

(e) $4\text{sec } x + \text{cotan } x$

(f) $\dfrac{x^2+1}{\text{sec } x}$

(g) $(x^3+\sqrt{x})\text{cosec } x$

(h) $\dfrac{x + \text{ sen } x}{x - \cos x}$

(i) $3x + 5\ln x$

(j) $e^x \cos x$

(k) $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

(l) $xe^x \cos x$

(m) $(1+\sqrt{x})e^x \tan x$

Algumas Respostas

Exercício 5:

(a) ∞

(b) 0

(c) 0

(d) 0

(e) $-\infty$

(f) 0

(g) ∞

(h) ∞

Exercício 7:

(a) ∞

(b) ∞

(c) $-\infty$

(d) 0

(e) $\ln(2)$

(f) $\ln(2)$

(g) $-\infty$

Exercício 8:

(a) e^2

(b) e^2

(c) e

(d) 1

(e) e^2

(f) e^2

Exercício 9:

(a) 2

(b) 0

(c) $\ln 5$

(d) $\dfrac{1}{2}$

(e) ∞

Exercício 10:

(a) 2

(b) 0

(c) $2x$

Exercício 11:

(a) $y = 4x - 4$

(b) $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$

(c) $x - 6y + 9 = 0$

(d) $y = x - 1$

Exercício 13:

(a) $6x^5$

(b) $100x^{99}$

(c) $-\dfrac{1}{x^2}$

(d) $-\dfrac{7}{x^8}$

(e) 1

(f) $-\dfrac{3}{x^4}$

(g) $\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

(h) $\dfrac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$

Exercício 14:
$y = x - 1$

Exercício 15:

(a) $2^x \ln 2$

(b) $\pi^x \ln \pi$

(c) $\dfrac{1}{x \ln 3}$

(d) $\dfrac{1}{x \ln \pi}$

Exercício 16:
$y = x$

Exercício 17:

(a) $-\mathrm{cosec}^2 x$

(b) -2

Exercício 20:

(a) $9x^2 - 4x$

(b) $3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(c) $-\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{10}{x^3}$

(d) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercício 21:
$y = 2x$

Exercício 22:

(a) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

(b) $\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{9x^2}{(x^3+2)^2}$

(d) $\dfrac{4\sqrt[4]{x^3}(3-x^2) - 7x^2 + 3}{4\sqrt[4]{x^3}(x^2+3)^2}$

Exercício 23:

(a) $-\dfrac{(x^2+1)\,\text{sen}\ x + 2x\cos x}{(x^2+1)^2}$

(b) $x[2\tan x + x\ \sec^2 x]$

(c) $\dfrac{-\,3(\cos x - \ \text{sen}\ x)}{(\ \text{sen}\ x + \cos x)^2}$

(d) $\text{sen}\ x[2x-1] + \cos x[x^2+1]$

(e) $4\ \sec\ x \tan x - \text{cosec}^2 x$

(f) $\dfrac{2x - (x^2+1)\tan x}{\sec\ x}$

(g) $\text{cosec}\ x \left[3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - (x^3+\sqrt{x})\text{cotan}\ x\right]$

(h) $\dfrac{(x-1)\cos x-(x+1)\operatorname{sen}\, x-1}{(x-\cos x)^2}$

(i) $3+\dfrac{5}{x}$

(j) $e^x[\cos x-\operatorname{sen}\, x]$

(k) $\dfrac{2e^x}{[1-e^x]^2}$

(l) $e^x[\cos x+x\cos x-x\operatorname{sen}\, x]$

(m) $e^x\left[\dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}}+(1+\sqrt{x})(\tan x+\sec^2 x)\right]$