7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-06-08

Outline

Probabilidade condicional

- Considere dois eventos A e B, com probabilidades $P(A) \neq 0$ e $P(B)$.
- Podemos definir o evento $B \cap A$, com probabilidade $P(B \cap A)$, que indica que os eventos B e A ocorreram simultaneamente.
- A relação

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

indica a fração dos casos em que B ocorre assumindo que A ocorreu. Ela é denominada probabilidade condicional.

Exemplo

- Se A é o evento: “o número na face superior do dado lançado é par” e B é o evento “o número na face superior do dado lançado é menor do que 3” então

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = \tfrac{1}{2},$$

$$P(B) = P(\{1,2\}) = \tfrac{1}{3},$$

e

$$P(B \cap A) = P(\{2\}) = \tfrac{1}{6},$$

e portanto

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \tfrac{1}{3},$$

o que nos diz que, se sabemos que o número da face é par, então temos $\frac{1}{3}$ de probabilidade de que ele seja menor do que 3.

Amostragem

- No caso de termos os dados de n amostras do nosso sistema, então o número de amostras que satisfazem o evento A será $n_A \neq 0$, os satisfazendo B e A simultaneamente será $n_{B\cap A}$ então as probabilidades serão avaliadas como
$$P(A) \approx \tfrac{n_A}{n},$$
$$P(B \cap A) \approx \frac{n_{B\cap A}}{n},$$
e
$$P(B \mid A) \approx \frac{\frac{n_{B\cap A}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{n_{B\cap A}}{n_A}.$$
- Isto é, avaliamos a probabilidade condicional de B dado A contando a fração de amostras que satisfazem B entre as que satisfazem A.

Probabilidade total

- Seja Ω o conjunto de todos os eventos simples.
- Uma partição de Ω é um conjunto de eventos

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

tal que

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega.$$

- Neste caso, podemos calcular a probabilidade total de um evento B através das probabilidades condicionais em relação aos eventos na partição:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) P(A_i).$$

Explicação

- isto é válido pois,
$$A_i \cap A_j = \varnothing$$
então
$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing.$$
- Portanto, pelos axiomas da probabilidade
$$P(B \cap (A_i \cup A_j)) = P((B \cap A_i) \cup (B \cap A_j)) = P(B \cap A_i) + P(B \cap A_j).$$
- Induzindo para toda a partição
$$P(B \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i).$$

Explicação (cont)

- Usando a definição de probabilidade condicional:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) P(A_i). \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- Suponha dois eventos quaisquer X e Y.
- Da definição de probabilidade condicional temos

$$P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}.$$

- Mas também

$$P(Y \mid X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}.$$

- Portanto

$$P(X \mid Y)P(Y) = P(Y \mid X)P(X),$$

  ou de outra forma:

$$P(X \mid Y) = \frac{P(Y \mid X)P(X)}{P(Y)}.$$

- Este é o conhecido teorema de Bayes.

Teorema de Bayes (cont)

- Usando uma partição de Ω:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

- Inserindo o resultado da probabilidade total:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i)P(A_i)}.$$

- Ou, no caso de usarmos um partição constituida de um evento A e seu complemento A_c:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A_c)P(A_c)}.$$

Exemplo: Descrição

- Suponha uma doença grave, para a qual temos um exame para detectar sua presença em algum paciente.
- Os seguintes fatos são conhecidos sobre a doença e sobre o exame:
  - A doença atinge 1 em cada 10000 pessoas.
  - O exame é extremamente preciso. Quando uma pessoa doente faz o exame, em 99.5% das vezes a doença é corretamente detectada. No restante dos 0.5% dos casos o exame falha em detectar a doença (falso negativo).
  - Quando uma pessoa livre da doença faz o exame, em 99.8% dos casos o exame corretamente indica que a pessoa está saudável; nos restantes 0.2% dos casos o exame falha e indica que a pessoa tem a doeença (falso positivo).

Exercício

Uma pessoa fez o exame e o resultado foi positivo. Qual é a probabilidade de que essa pessoa esteja doente?

Exemplo: Solução

- Para resolver, precisamos formalizar as informações.
- Usamos A para indicar que a pessoa está doente, A_c indica que ela não está doente.
- Usamos B para indicar que o exame retornou positivo.
- A questão pede para calcular $P(A \mid B)$.

Solução (cont)

- Os dados apresentados nos dizem:

$$P(A) = \frac{1}{10000}, \quad P(A_c) = 1 - \frac{1}{10000},$$
$$P(B \mid A) = 0.995, \quad P(B \mid A_c) = 0.002.$$

- Usando o teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A_c)P(A_c)} \\ &= \frac{0.995 \cdot 0.0001}{0.995 \cdot 0.0001 + 0.002 \cdot 0.9999} \\ &\approx 0.0476. \end{aligned}$$

- Isto é, a probabilidade da pessoa estar doente é menor do que 5%!

Problema 2

Consideramos agora a mesma situação anterior, mas após o exame anterior, o médico solicita um novo exame de confirmação, que também sai positivo.

Exercício

Qual a probabilidade da pessoa ter a doença?

Solução

- Agora a pessoa não é mais uma pessoa geral da população, mas já temos uma informação adicional sobre ela: que ela fez o exame uma vez e este deu positivo. Então precisamos reformular a formalização.
- Seja C o evento de que este paciente tem a doença e C_c de que ele não tem.
- Neste caso, com nossa informação anterior, podemos avaliar $P(C) = 0.0476$ e $P(C_c) = 0.9524$.
- O exame continua o mesmo, portanto $P(B \mid C) = 0.995$ e $P(B \mid C_c) = 0.002$.

Solução (cont)

- Calculamos então

$$
\begin{aligned}
P(C|B) &= \frac{P(B|C)P(C)}{P(B \mid C)P(C) + P(B \mid C_c)P(C_c)} \\
&= \frac{0.995 \cdot 0.0476}{0.995 \cdot 0.0476 + 0.002 \cdot 0.9524} \\
&\approx 0.9613.
\end{aligned}
$$

- Isto é, após o segundo exame temos 96% de confiança de que a pessoa tem a doença.
- Essa atualização das probabilidades de acordo com novas informações é típica da interpretação Bayesiana de probabilidades, onde uma probabilidade indica apenas o nosso estado de conhecimento sobre um evento, ao invés de indicar um número fixo pré-existente.

Eventos independentes

- Dois eventos A e B são ditos independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Em termos de probabilidades condicionais isso equivale a

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B \mid A) = P(B).$$

- Isto é, a probabilidade de cada um dos eventos não é afetada pela ocorrência ou não do outro evento.
- Em termos experimentais, a frequência de ocorrência do evento A dentro de toda a amostragem é igual à frequência de A restrita aos casos onde B ocorre, e vice-versa:

$$\frac{n_A}{n} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}, \quad \frac{n_B}{n} = \frac{n_{B\cap A}}{n_A}.$$