

Ondas Electromagnéticas II

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Cap. 7]

[J. Frenkel; Princípios de Electrodinâmica Básica, Cap. 6]

Preâmbulo

Considera-se que os alunos dominem os fundamentos da teoria de ondas planas, ao nível do material discutido no livro texto de graduação, D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Cap. 9. Neste curso serão aprofundados apenas alguns tópicos mais avançados.

Transformada de Fourier da Equação de Ondas sem fontes

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad \psi(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k, \omega) e^{-ikz} dk$$

$$\psi(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, t) e^{-i\omega t} dt; \quad \psi(k, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, \omega) e^{ikz} dz$$

Aplicando para os dois termos da equação de onda, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi(z, t) dt \right] = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z, \omega)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t} \psi]_{-\infty}^{\infty} - \omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi dt$$

A última integral resulta em $-\omega^2 \psi(z, \omega)$. Os dois primeiros termos se anulam se ω for real e $\partial \psi / \partial t$; $\psi \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Então

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dt = -\omega^2 \psi(z, \omega) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \psi(z, \omega) = 0$$

OBS: quando ω for complexo, o que pode ocorrer em meios materiais, esses termos têm que ser considerados apropriadamente.

Aplicando agora a transformada com relação à coordenada espacial, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{ikz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} [e^{ikz} \psi]_{-\infty}^{\infty} - k^2 \psi(k, \omega)$$

Outra vez, os dois primeiros termos se anulam se k for real e o campo e sua derivada se anularem rapidamente no infinito. A transformada do segundo termo da equação fornece simplesmente $\psi(k, \omega)$, de forma que a equação de onda transforma resulta em

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \psi(k, \omega) = 0 \implies \omega^2 = k^2 c^2$$

que é a já conhecida relação de dispersão para ondas eletromagnéticas no vácuo.

OBS

1. Caso não estejamos no vácuo, a relação de dispersão não será esta, mas sempre haverá uma relação entre a frequência e o número de onda, isto é, $\omega = \omega(k)$,
2. Como a frequência depende do número de onda, para obter $\psi(z, t)$ não é necessário fazer a transformada inversa no domínio de frequência, ou seja,

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi[k, \omega(k)] e^{-i[kz - \omega(k)t]} dk$$

Pacote de Ondas e Velocidade de Grupo

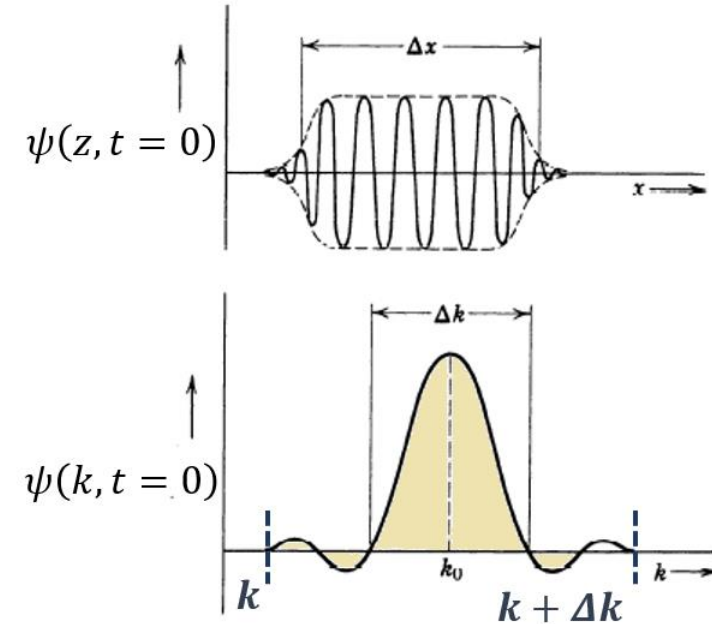
Vamos agora considerar um impulso eletromagnético (em uma dimensão) que, no instante $t = 0$, esteja concentrado em um intervalo espacial de largura Δz . Então, a representação do impulso será

$$\psi(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{ikz} dk$$

- O espectro de Fourier do impulso (“pacote de onda”) estará concentrado em um determinado número de onda, $k = k_0$, e terá uma largura Δk que dependerá de Δz .
- Na extremidade esquerda do pacote, todas as componentes

de Fourier se interferem destrutivamente. Com o deslocamento Δz a componente de Fourier k sofre uma variação de fase $\Delta\varphi_k = k\Delta z$ e a componente $k + \Delta k$ sofre uma variação de fase $\Delta\varphi_{k+\Delta k} = (k + \Delta k)\Delta z$.

Como as componentes de Fourier também se interferem destrutivamente no final do pacote, temos $\Delta\varphi_{k+\Delta k} - \Delta\varphi_k \approx 2\pi \Rightarrow \Delta k \Delta z \approx 2\pi$ ($\Delta p \Delta z \sim \hbar$; $p = \hbar k$)



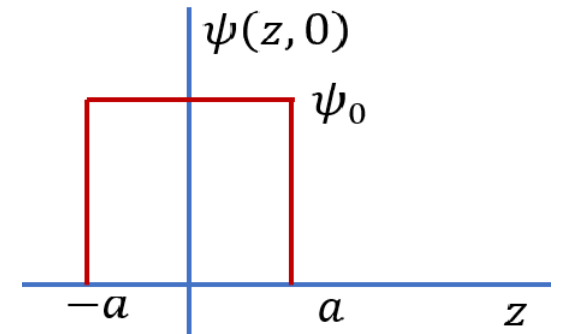
Exercício

No instante $t = 0$, considere o impulso retangular mostrado na figura.

Mostre que

$$\psi(k, t = 0) = \frac{2\psi_0}{\sqrt{2\pi}} a \frac{\sin(ka)}{(ka)}$$

e calcule o valor aproximado do produto $\Delta k \Delta z$ neste caso.



Velocidade de Grupo

Pacote de ondas em três dimensões:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \psi(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 k; \quad \omega = \omega(\vec{k})$$

Pacote de ondas estreito, centrado em $\vec{k} = \vec{k}_0$,

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + (\nabla_{\vec{k}} \omega) \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) + \dots; \quad (\nabla_{\vec{k}} \omega) \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) = \sum_i \frac{\partial \omega}{\partial k_i} (k_i - k_{i0})$$

Portanto,

$$\psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \psi(\vec{k}) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot (\vec{r} - (\nabla_k \omega) \cdot t)} d^3 k \right] e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}; \quad \omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$$

Definições: $\vec{\xi} = \vec{r} - (\nabla_k \omega)t$; $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_0$

$$\psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \psi(\vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{\xi}} d^3 k' \right] e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} = \psi(\vec{\xi}) e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}$$

Conclusão:

Pacote de onda propaga-se como uma onda monocromática na frequência de sua componente principal, $\omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$, mas com amplitude variável no tempo, $\psi(\vec{\xi})$. Esta amplitude permanece constante ao longo da trajetória

$$\vec{\xi} = \vec{r} - (\nabla_k \omega)t = \vec{r}(t = 0)$$

Portanto propaga-se com a *velocidade de grupo* $\vec{v}_g = \nabla_k \omega$

Caso especial: meios materiais com $\epsilon; \mu \rightarrow \text{const}$

Velocidade de fase: $\vec{v}_f = v_f \hat{k}; v_f = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = \omega/k$

Índice de refração: $n(\omega) = c/v_f \rightarrow \vec{v}_f = \frac{c}{n} \hat{k}$

Velocidade de grupo:

$$\vec{v}_g = \nabla_k \omega = \nabla_k \left(\frac{ck}{n} \right) = \frac{c}{n} \hat{k} - \frac{ck}{n^2} (\nabla_k \omega) \frac{dn}{d\omega} = \frac{c}{n} \hat{k} - \frac{\vec{v}_g}{n} \omega \frac{dn}{d\omega}$$

portanto,

$$\frac{1}{n} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \vec{v}_g = \frac{c}{n} \hat{k} \rightarrow \vec{v}_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]} \hat{k}$$

$$\vec{v}_f \cdot \vec{v}_g = \frac{c^2}{n(\omega) \left[n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]}$$

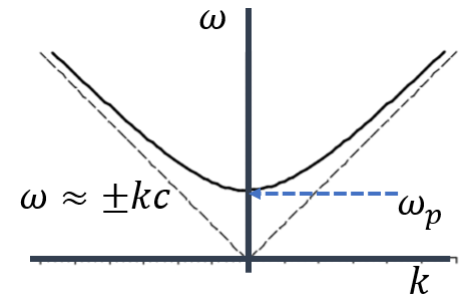
Exemplo meio dispersivo: ondas em fluído condutor

Meio com densidade N de elétrons, com um fundo neutralizador de íons imóveis $\rightarrow$ só elétrons transportam corrente.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}; \quad \vec{J} = -Ne\vec{v}; \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} = e \frac{d\vec{A}}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{e}{m} \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{Ne^2}{m} \vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \left[-k^2 c^2 + \omega^2 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \right] \vec{A}_0 = 0$$



Relação de dispersão:

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2}; \quad \omega_p \equiv \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \Rightarrow v_f = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}}; \quad v_g = c / \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}}; \quad v_f v_g = c^2$$