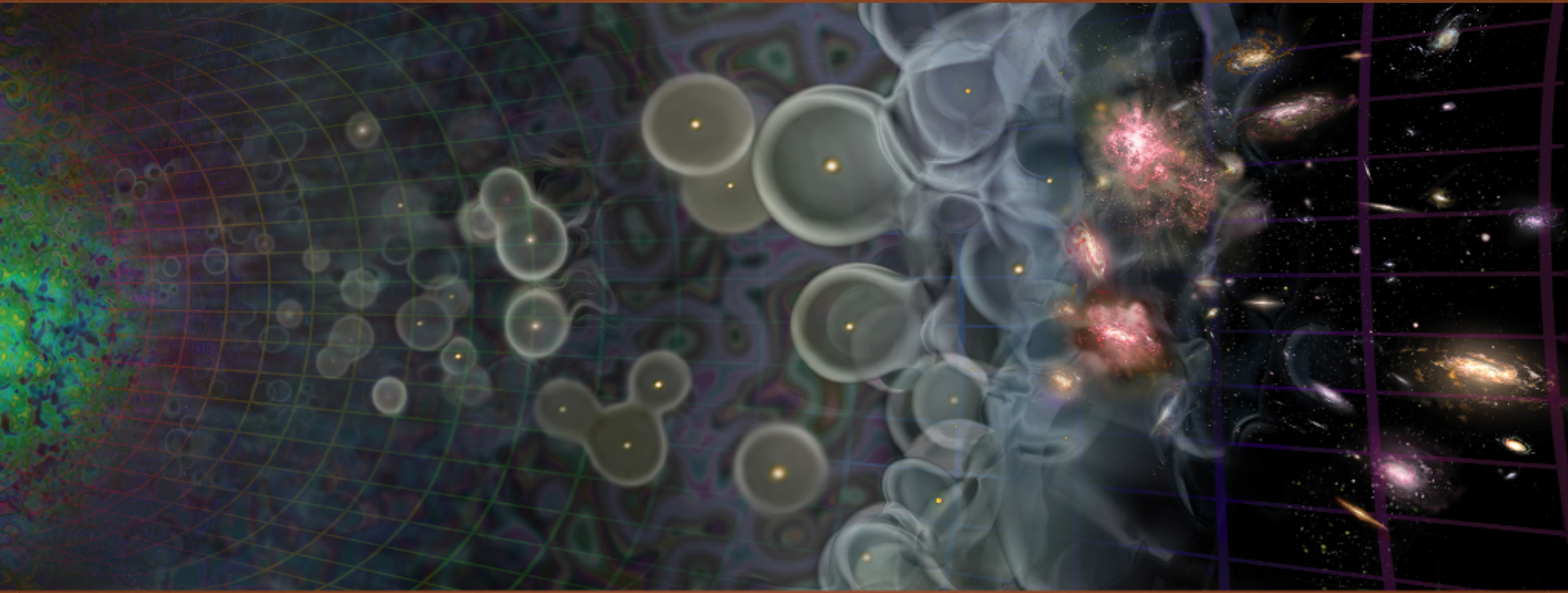
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

AULA 23 - 08/06/2020

- O Princípio Cosmológico
- O espaço hiperbólico de Gauss-Lobachevski-Bolyai
- Homogeneidade e isotropia
- A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
- **Leitura: 8.1-8.2 do Carroll**

AFINAL, O QUE É O "UNIVERSO"?

HST - Hubble Deep Field

AFINAL, O QUE É O “UNIVERSO"?

- A Cosmologia é a "ciência do Cosmos”: como o universo surgiu, quando ele começou, como evoluiu, etc.

- A rigor, “universo" se refere a tudo: toda a matéria, todo o espaço — e todo o tempo também.

- Isso claramente não ajuda: ficaremos decepcionados se quisermos descrever “tudo" através da Cosmologia — desde um aglomerado de galáxias até um vírus.

- Esse "universo" a que nos referimos é aquilo que vimos na figura da página anterior: uma ***descrição nas maiores distâncias e nos maiores tempos*** que podemos conceber. Ou seja, uma visão “de cima”.

AFINAL, O QUE É O “UNIVERSO"?

- O “modelo teórico" que usamos para descrever o universo nas maiores escalas (de espaço e de tempo) trata tanto a matéria como o espaço-tempo num sentido aproximado — uma “média” no espaço e no tempo. Sua base é, claro, a Relatividade Geral.

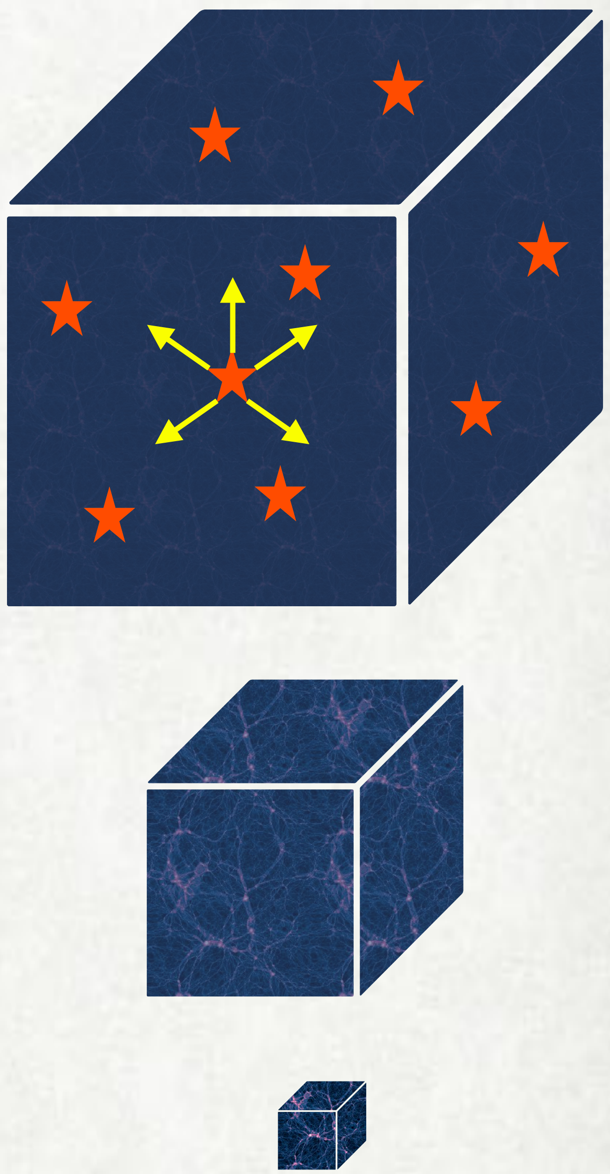
- A matéria que preenche o universo, e que tem um papel central nessa descrição, é observada por meio de objetos que emitem luz ou outros sinais que podem ser captados por nossos telescópios: estrelas, supernovas, quasares, pulsares, galáxias e aglomerados de galáxias.

- Essas observações são feitas por meio da luz em diversos comprimentos de onda: raios cósmicos, raios-γ, raios-X, radiação cósmica de fundo em microondas, ondas de rádio… e agora, também, por meio de ondas gravitacionais.

- Cada uma dessas “janelas" tem um determinado alcance (em termos de uma distância máxima até onde podemos enxergar o universo), mas os avanços tecnológicos empurram esses limites cada vez mais adiante.

AFINAL, O QUE É O “UNIVERSO"?

- Nosso objetivo é, portanto, descrever o universo em suas ***maiores escalas***.
- Mas como imaginamos que o universo ***deve se parecer***, olhando assim tão “do alto”?
- Será que vamos enxergar algum ponto ou lugar especial, onde a matéria esteja mais concentrada, e o espaço-tempo seja um pouco mais encurvado?
- Será que, ao olharmos ou nos deslocarmos em uma direção, enxergaremos algo diferente de uma outra direção qualquer?



O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- O que está por trás dessas idéias é a noção de que existem algumas simetrias que ***em princípio*** imaginamos devam estar representadas no universo.

- Essas simetrias se chamam ***homogeneidade*** e ***isotropia***.

- ***Homogeneidade*** é a noção de que qualquer posição é equivalente a qualquer outra: uma ***translação espacial*** não muda as características da matéria ou do espaço.

- Isotropia é a noção de que o universo parece o mesmo quando observado em ***qualquer direção***.

- A combinação dessas duas simetrias é uma hipótese básica da cosmologia: o ***Princípio Cosmológico***

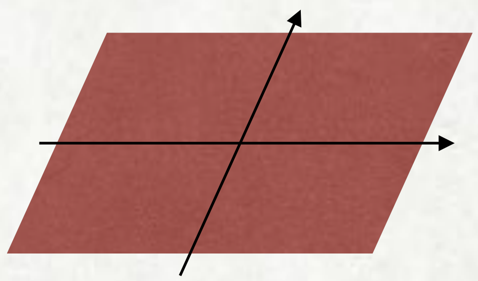
Homogeneidade sem isotropia

Isotropia sem homogeneidade

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

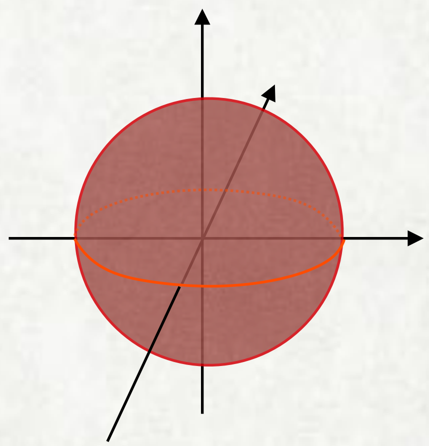
- Vamos agora "aquecer os motores", construindo todas as variedade em 2D espaciais (ou seja, ***superfícies***) que realizam essa idéia de homogeneidade e isotropia.

- A primeira superfície é bem conhecida de nós: o plano Euclideano, cuja métrica ***em qualquer ponto*** é:



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

- Um outro exemplo familiar é a esfera 2D (S^2) de raio R_0 que, assim como o plano Euclideano, possui as simetrias de homogeneidade e isotropia.



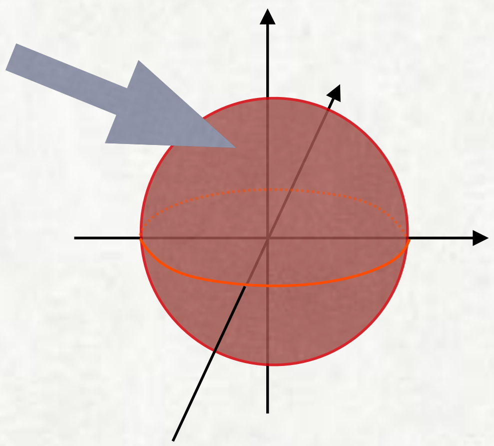
- O mapeamento dessa esfera pode ser feita pela sua ***imersão*** em 3D, com uma escolha de coordenadas, por exemplo:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad , \quad \text{onde} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$$

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- Vamos tomar a ***calota*** (*hemisfério*) Norte para fazer uma dedução que será generalizada daqui a pouco.

$$z = \sqrt{R_0^2 - x^2 + y^2} = \sqrt{R_0^2 - \vec{x}^2} \quad , \quad \text{onde } \vec{x} \equiv x\hat{i} + y\hat{j}$$



- Portanto, temos que, na calota Norte da esfera 2D:

$$dz = -\frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{\sqrt{R_0^2 - \vec{x}^2}}$$

- Substituindo na métrica Euclideana, mas agora com a coordenada z limitada a essa calota, temos:

$$dl_{S2}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{x}^2 + \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{R_0^2 - \vec{x}^2}$$

- Fazendo agora a mudança de variáveis $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi$, $\vec{x}^2 = \rho^2$, temos:

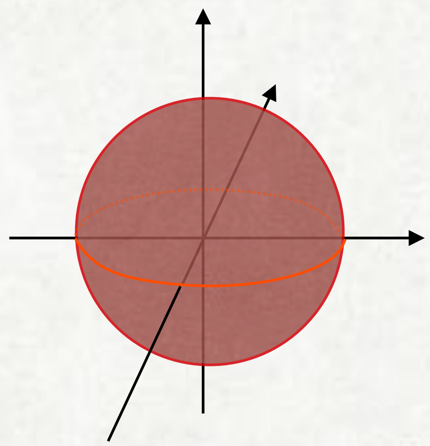
$$dx = d\rho \cos\varphi - \rho \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \quad , \quad dy = d\rho \operatorname{sen}\varphi + \rho \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad dl_{S2}^2 = d\rho^2 \left(\frac{R_0^2}{R_0^2 - \rho^2} \right) + \rho^2 d\varphi^2 \quad , \quad \text{que é a métrica da esfera em coordenadas cilíndricas.}$$

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- Essa forma da métrica da esfera, usando coordenadas cilíndricas, ainda é pouco familiar:

$$dl_{S2}^2 = d\rho^2 \left(\frac{R_0^2}{R_0^2 - \rho^2} \right) + \rho^2 d\varphi^2$$



- Para chegar em algo mais elegante, vamos introduzir o ângulo θ:

$$\rho = R_0 \operatorname{sen} \theta \quad , \quad d\rho = R_0 \cos\theta \, d\theta$$

- Substituindo essa expressão na métrica acima chegamos em:

$$dl_{S2}^2 = R_0^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

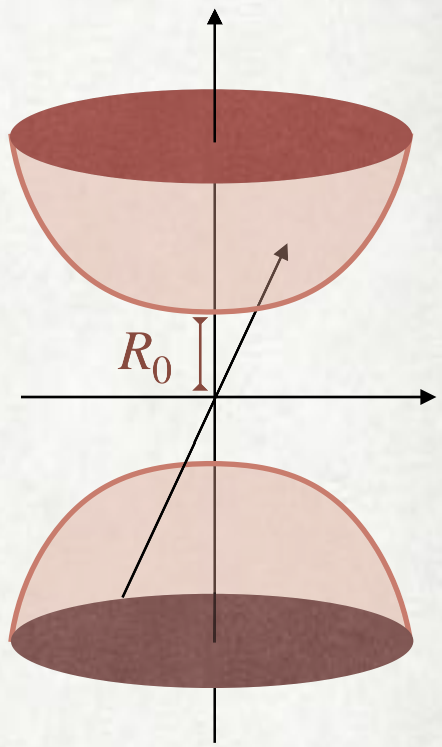
- Nesse formato temos não só a esfera inteira (ambos hemisférios), mas também fica claro que qualquer posição em cima da esfera é equivalente a qualquer outra (homogeneidade). E de qualquer ponto na superfície da esfera, todas as direções são equivalentes (isotropia)

- Temos, portanto, duas variedades de duas dimensões espaciais, uma infinita (o plano Euclideano) e outra finita (a esfera S^2), que obedecem o "Princípio Cosmológico".

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- Agora vamos mostrar que existe uma terceira superfície que possui as simetrias de homogeneidade e isotropia. Para isso vamos partir da esfera S^2, mas vamos tomar:

$$z \to i\,z \quad \text{e} \quad R_0 \to i\,R_0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 - z^2 = -R_0^2$$



- A superfície definida por essa equação é um ***hiperbolóide de revolução*** , H^2.

- Novamente, primeiro passamos de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$, e escrevemos:

$$z = \pm\sqrt{R_0^2 + \rho^2}$$

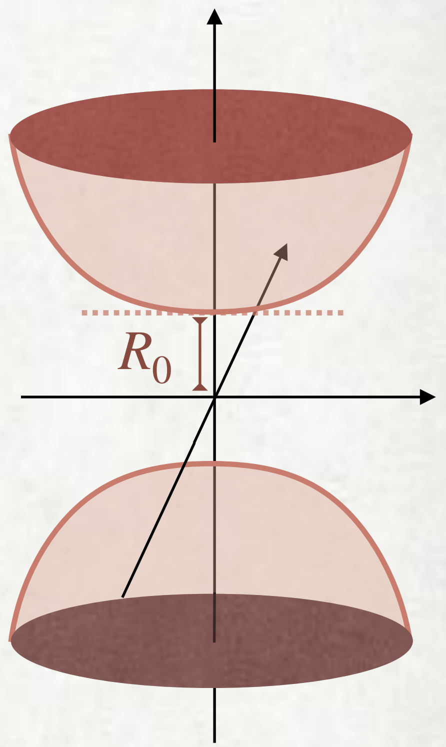
- A métrica Euclideana em 3D, na superfície de H2, fica então escrita de modo similar ao da esfera S^2:

$$dl_{S2}^2 = d\rho^2\left(\frac{R_0^2}{R_0^2 - \rho^2}\right) + \rho^2 d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad dl_{H2}^2 = d\rho^2\left(\frac{R_0^2}{R_0^2 + \rho^2}\right) + \rho^2 d\varphi^2$$

- Não parece, mas essa também é uma superfície homogênea e isotrópica!

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- Para mostrar que essa superfície de fato possui as simetrias de homogeneidade e isotropia, vamos introduzir, em analogia com as coordenadas "esféricas" da esfera S², as coordenadas "hiperbólicas" em termos de um ângulo ψ:



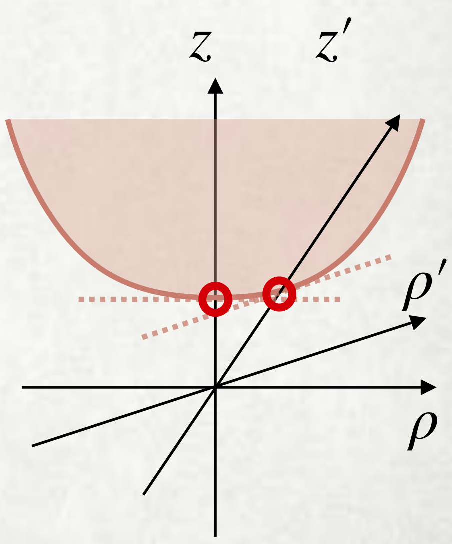
$\rho = R_0 \,\mathrm{senh}\,\psi \quad , \quad d\rho = R_0 \cosh\psi \, d\psi \quad ,$ de modo que

$$z^2 = R_0^2 + \rho^2 = R_0^2 \cosh^2\psi$$

- Temos então que:

$$dl_{H2}^2 = d\rho^2 \left(\frac{R_0^2}{R_0^2+\rho^2} \right) + \rho^2 d\varphi^2 \;=\; R_0^2 \left(d\psi^2 + \mathrm{senh}^2\psi \, d\varphi^2 \right)$$

- Note que a distância $z^2 - \rho^2 = R_0^2$ é um ***invariante***: sob $\psi \to \psi' = \psi + \psi_0$ temos:



$$\rho(\psi) \to \rho' = \rho(\psi') = \rho(\psi)\,\cosh\psi_0 + z(\psi)\,\mathrm{senh}\,\psi_0$$

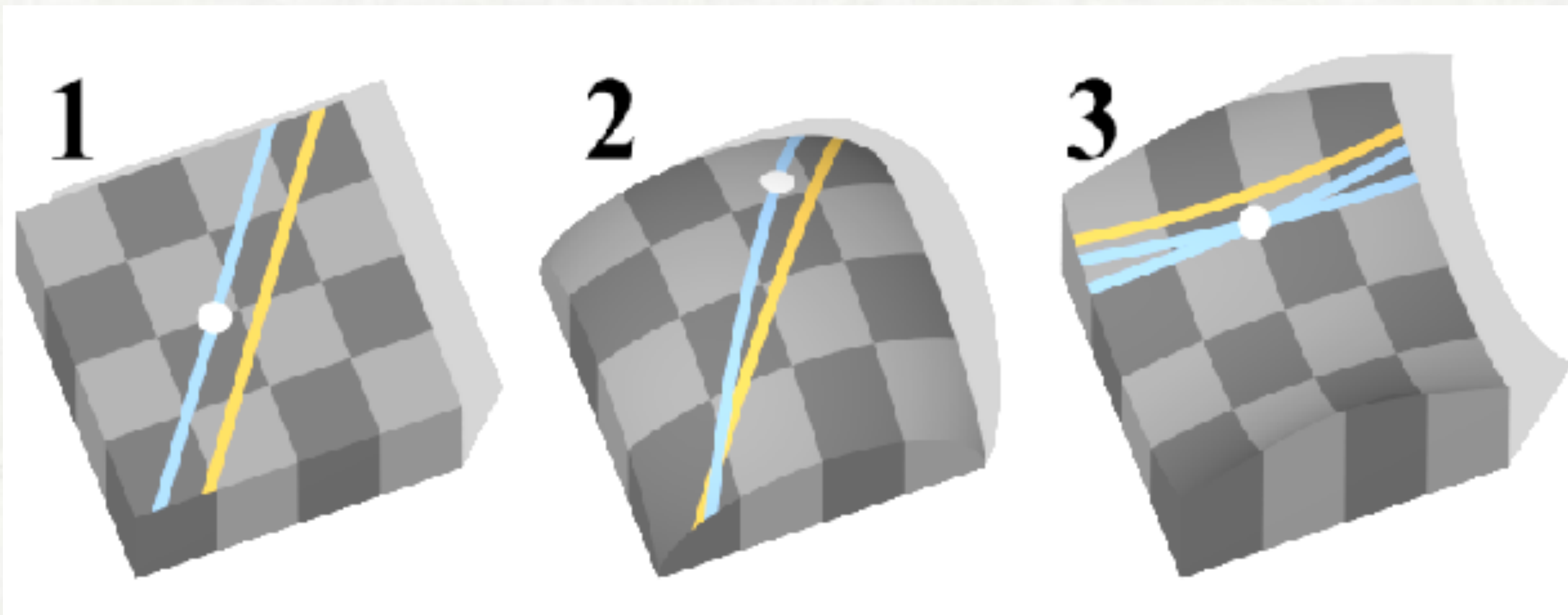
$$z(\psi) \to z' = z(\psi') = z(\psi)\,\cosh\psi_0 + \rho(\psi)\,\mathrm{senh}\,\psi_0$$

onde usamos $\cosh(\psi+\psi_0) = \cosh\psi\,\cosh\psi_0 + \mathrm{senh}\,\psi\,\mathrm{senh}\,\psi_0$.

- Mas o resultado é que: $z^2 - \rho^2 = z'^2 - \rho'^2 = R_0^2$, ou seja, o "fundo" desse hiperbolóide pode ser em qualquer lugar! (Ou seja, o que fizemos foi uma "rotação" nesse espaço hiperbólico!)

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

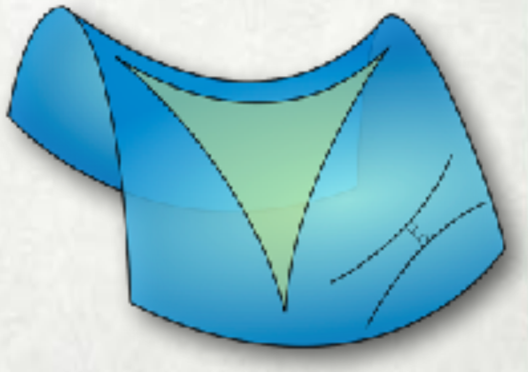
- Os primeiros matemáticos a descobrir esse novo tipo de superfície, infinita, homogênea e isotrópica, mas fundamentalmente diferente do espaço Euclideano, foram Gauss, Lobachevsky e Bolyai.



Eles mostraram que esses "espaços hiperbólicos" violavam um dos pilares da Geometria Euclideana, o "***Postulado das retas paralelas***": "dada uma reta e um ponto fora da reta, existe apenas uma reta paralela à primeira reta, e que passa pelo ponto".

- Na superfície do hiperbolóide, dado um ponto e uma reta, existem muitas (infinitas!) retas paralelas à reta dada que passam pelo ponto!

- Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo é < 180º !



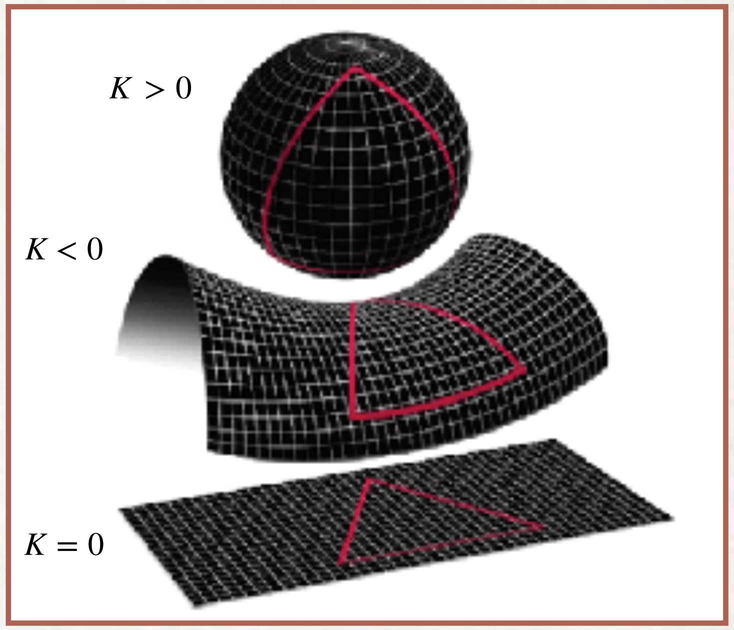
O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

- Essa nova superfície, o hiperbolóide H^2, é uma terceira superfície que possui as simetrias de homogeneidade e isotropia. Vamos coletar as três:

$$dl^2_{S2} = R_0^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad \text{Superfície } \textbf{\textit{finita (fechada)}}$$

$$dl^2_{E2} = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2 \qquad \text{Superfície } \textbf{\textit{infinita (plana)}}$$

$$dl^2_{H2} = R_0^2\left(d\psi^2 + \text{senh}^2\psi\, d\varphi^2\right) \qquad \text{Superfície } \textbf{\textit{infinita (aberta)}}$$



- Podemos ***unificar*** todas essas superfícies, estabelecendo uma relação $\theta \leftrightarrow \rho \leftrightarrow \psi$, se usarmos a identidade $\text{sen}\, i\theta = i\text{senh}\,\theta$. Vamos definir a coordenada unificada χ tal que:

$$dl^2 = d\chi^2 + \frac{1}{K}\text{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) d\varphi^2$$

  - Se $K = +R_0^{-2}$ temos $\chi = R_0\,\theta \quad \Rightarrow \quad d\vec{l}^2 = R_0^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right)$
  - Se $K \to \pm 0\ (R_0 \to \infty)$ temos $\chi = \rho \quad \Rightarrow \quad d\vec{l}^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2$
  - Se $K = -R_0^{-2}$ temos $\chi = R_0\,\psi \quad \Rightarrow \quad d\vec{l}^2 = R_0^2\left(d\psi^2 + \text{senh}^2\psi\, d\varphi^2\right)$

COORDENADAS HIPER-ESFÉRICAS

- A constante K é chamada de ***curvatura da seção espacial***. Os três casos são portanto:

$K > 0 \rightarrow$geometria fechada; $K = 0 \rightarrow$ geometria plana; e $K < 0 \rightarrow$ geometria aberta.

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO EM 3D

- As superfícies 2D acima podem ser ***generalizadas para espaços 3D***, bastando fazer $d\varphi^2 \to d\Omega^2$:

$$dl^2 \ = \ d\chi^2 + \frac{1}{K}\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) d\varphi^2 \quad \to \quad dl^2 \ = \ d\chi^2 + \frac{1}{K}\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) d\Omega^2$$

- Esses espaços 3D são igualmente ***homogêneos e isotrópicos.***

- Vamos agora explorar a métrica desses espaços desde diversos pontos de vista, e utilizando diversos sistemas de coordenadas.

- Para começar, fazemos uma mudança de variável, definindo:

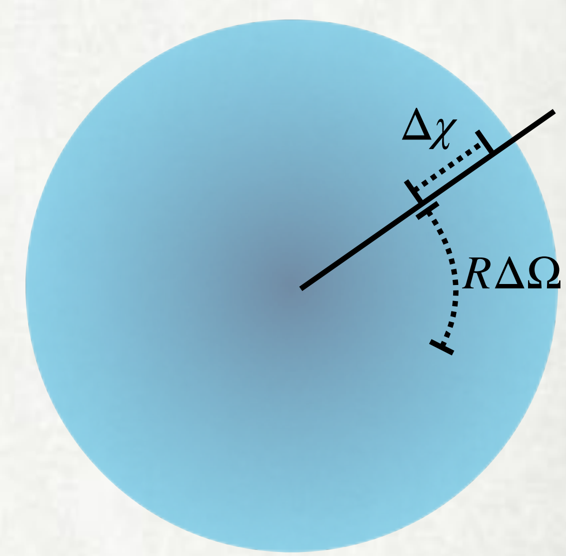
$$R^2 \equiv \frac{1}{K}\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) \quad \Rightarrow \quad RdR = \frac{1}{\sqrt{K}}\mathrm{sen}\left(\sqrt{K}\chi\right)\cos\left(\sqrt{K}\chi\right)$$

- A métrica fica então escrita nessas coordenadas como:

$$dl^2 \ = \ \frac{dR^2}{1 - K\,R^2} + R^2\, d\Omega^2$$

Distância radial ($\Delta\Omega = 0$):

$$\Delta l_{rad} = \int_R^{R+\Delta R} \frac{dR}{\sqrt{1 - KR^2}} = \Delta\chi$$



Distância angular:

$$\Delta l_{ang} = R\Delta\Omega$$

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO EM 3D

- Agora vamos fazer mais uma mudança de coordenadas, e definir:

$$R \equiv \frac{r}{1+\frac{K}{4}r^2} \quad \leftrightarrow \quad 1-KR^2 = \frac{\left(1-\frac{K}{4}r^2\right)^2}{\left(1+\frac{K}{4}r^2\right)^2}$$

- É fácil mostrar também que:

$$dR = \frac{1-\frac{K}{4}r^2}{\left(1+\frac{K}{4}r^2\right)^2}dr$$

- Portanto, obtemos assim que:

$$dl^2 = \frac{dR^2}{1-K\,R^2} + R^2\,d\Omega^2 = \frac{dr^2+r^2d\Omega^2}{\left[1+\frac{K}{4}\,r^2\right]^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\left[1+\frac{K}{4}\,(x^2+y^2+z^2)\right]^2}$$

ISOTROPIA EXPLÍCITA

o que mapeia as nossas superfícies em termos de ***coordenadas "conformes-cartesianas"***. Note que, assim como nas coordenadas cartesianas, a ***localização da origem é arbitrária***.

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO EM 3D

- De um modo completamente geral, portanto, a ***parte espacial*** do espaço-tempo (a chamada ***seção espacial***) tem uma métrica dada pelo elemento de linha genérico:

  $$dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad ,$$

  onde a ***métrica da seção espacial*** γ_{ij} , dada acima em algumas coordenadas diferentes, depende apenas de K (a ***curvatura da seção espacial***), além das próprias coordenadas.

- Esses espaços são os ***únicos*** que possuem as simetrias de ***homogeneidade*** e ***isotropia***.

- Devido às suas simetrias, a ***curvatura de Riemann*** desses espaços pode ser escrita como:

  $$R_{ijkl} = K\left(\gamma_{ik}\,\gamma_{jl} - \gamma_{jk}\,\gamma_{il}\right)$$

  [Exercício da próxima lista!]

- Apenas no caso em que $K = 0$ (seção espacial plana) é que essa seção espacial se reduz ao caso familiar, Euclideano.

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO EM 3D

- Na literatura há uma certa confusão com relação à curvatura espacial, K. Matematicamente, ela é -1 (geometria hiperbólica), 0 (geometria plana), ou +1 (geometria esférica). Mas fisicamente ela deve ter dimensões: $K = \pm R_0^{-2}$, onde R_0 é o ***raio de curvatura*** (uma distância), e o limite $K \to 0$ equivale a tomar $R_0 \to \infty$.

- Isso significa que um espaço com curvatura espacial muito pequena é praticamente indistinguível de um espaço de curvatura nula.

O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO EM 3D

- Vamos fazer um exercício simples: no caso em que $K = +R_0^2$, esse espaço 3D é ***fechado, finito***. Temos então:

$$dl^2 \;=\; d\chi^2 + \frac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) d\Omega^2 \;=\; d\chi^2 + R_0^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\chi}{R_0}\right) d\Omega^2$$

- Claramente, a coordenada χ tem o papel de um ***ângulo***: o espaço é idêntico sob $\chi \leftrightarrow \chi + 2\pi R_0$

- Em qualquer das coordenadas usadas acima a métrica é dada por uma expressão tal como $dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j$, onde γ_{ij} é a ***métrica da seção espacial***, e o ***volume espacial*** é dado por $dV = \sqrt{\det \gamma}\, dx^1 dx^2 dx^3$.

- Mas se esse espaço é de fato fechado, então o ***volume é finito***. Usando as coordenadas $x^1 \to \chi$, $x^2 \to \theta$, $x^3 \to \varphi$ temos:

$$V = \int \frac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{K}\chi\right) d\chi\, d\Omega = \int R_0^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\chi}{R_0}\right) d\chi \int d\Omega$$

- Fazendo $\chi = R_0\,\psi$ e usando que $\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,\psi\, d\psi = \pi$, obtemos $\Rightarrow \quad V = R_0^3 \times \pi \times 4\pi = 4\pi^2 R_0^3$

- É interessante também medir o ***volume numa região pequena***, de $\chi = 0$ até $\Delta\chi = R_0\,\Delta\psi$, com $\Delta\psi \ll 1$. Temos:

$$\Delta V = R_0^3 \int_0^{\Delta\psi} \mathrm{sen}^2\,\psi\, d\psi \int d\Omega \simeq R_0^3 \int_0^{\Delta\psi} \psi^2\, d\psi \int d\Omega = R_0^3 \times \frac{1}{3}\Delta\psi^3 \times 4\pi = \frac{4\pi}{3}\Delta\chi^3$$

A MÉTRICA DA COSMOLOGIA

- Todas as métricas escritas acima denotam os mesmos espaços 3D — a única diferença é que elas estão escritas em termos de coordenadas diferentes.

- Mas as simetrias espaciais de homogeneidade e isotropia não se estendem à coordenada temporal: não há nenhuma razão para supor que o universo hoje seja igual ao universo no passado ou no futuro.

- Isso significa que a métrica 4D pode conter uma dependência temporal, algo como:

$$ds^2 = -\, b^2(t')\, dt'^2 + a^2(t')\, dl^2$$

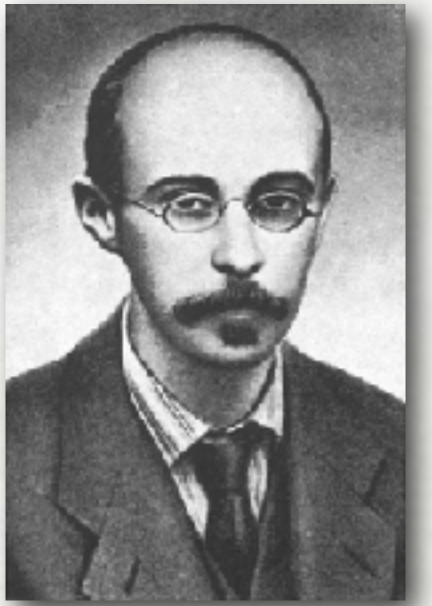
- Mas claramente podemos redefinir a variável temporal como $dt = b(t')/a(t')\, dt'$, e assim:

$$ds^2 = -\, dt^2 + a^2(t)\, dl^2 \quad , \quad \text{com } dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j \; .$$

Essa é a chamada ***métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*** (FLRW), e a função $a(t)$ se chama ***fator de escala.***

A MÉTRICA DA COSMOLOGIA

- A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) foi descoberta primeiro pelo matemático russo ***Alexander Friedmann*** em 1922-1924, em colaboração estreita com o Einstein. Mas os trabalhos permaneceram obscuros, e sem uma interpretação clara (Friedmann morreu em 1925).



Alexander **Friedmann**

- ***Georges Lemaître***, um padre belga, descobriu de modo independente essa mesma métrica em 1927, e também resolveu as equações de Einstein. Porém, como ele tinha mais familiaridade com as observações de Edwin Hubble, conseguiu dar a interpretação correta às soluções. Lemaître é hoje considerado o ***precursor da cosmologia moderna.***

- Nos anos 1930-1935 os físicos-matemáticos americanos Howard Robertson e Arthur Walker demonstraram que a métrica FLRW é a ***única métrica*** que respeita homogeneidade e isotropia, com uma seção espacial "maximalmente simétrica".

- A ***métrica do espaço-tempo*** de FLRW é, portanto:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad ,$$

onde γ_{ij} é a ***métrica da seção espacial***, que depende de uma constante universal, K — a ***curvatura da seção espacial.***

Georges **Lemaître**

A MÉTRICA DA COSMOLOGIA

- A interpretação física dessa métrica fica mais simples se considerarmos distinção entre a distância em coordenadas e a distância física entre dois pontos.

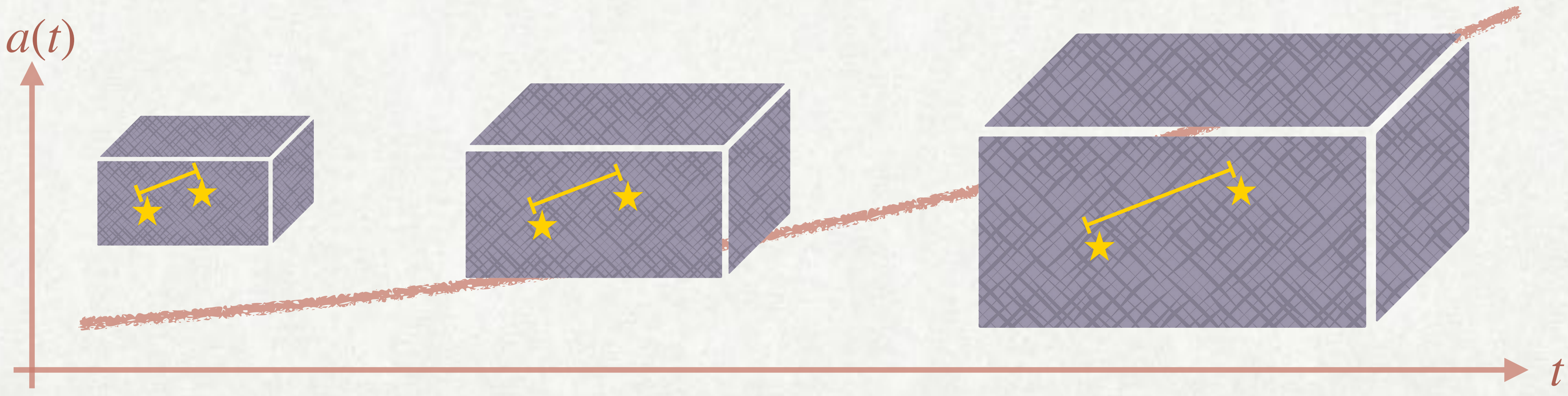
- A distância em coordenadas entre dois eventos quaisquer separados por um intervalo tipo-espaço Δx^i é:

$$\Delta l^2 = \gamma_{ij}\, \Delta x^i\, \Delta x^j$$

- Já a ***distância física*** entre dois eventos simultâneos ($\Delta t = 0$) é dada por:

$$\Delta s^2 = a^2(t)\, \Delta l^2$$

- Em geral nos referimos à distância em coordenadas como a ***distância comóvel***, Δx^i, enquanto a ***distância física*** é dada por $a(t)\Delta x^i$. (É claro que isso se aplica às coordenadas com dimensão de comprimento, e não às coordenadas angulares!)



  - Δl em "unidades do grid" dá a distância comóvel, que é constante p/ 2 pontos fixos
  - $\Delta s = a(t)\Delta l$ é a distância física, que muda com o tempo.

A MÉTRICA DA COSMOLOGIA

- Mas se a seção espacial tem uma curvatura constante (K), e portanto ela é "estática", a pergunta é naturalmente: qual a ***dependência temporal do fator de escala*** $a(t)$?

- Em outras palavras: qual a ***dinâmica do universo***, descrita pela evolução no tempo do fator de escala?

- Para isso vamos ter de resolver as ***Equações de Einstein*** usando a métrica de FLRW.

- Isso significa também contemplar a ***descrição da matéria*** num universo homogêneo e isotrópico.

AULA QUE VEM:

- O tensor de energia-momento na cosmologia
- As equações de Friedmann
- Hubble, a descoberta da expansão do universo e o *Big Bang*
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 8

- **Prova final (online): 20% da nota (80% de Listas de Exercícios)**
  - ➡ **29 de Junho**