

NOME \_\_\_\_\_ N°USP \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Seja  $\mathbf{P}$  a matriz de transições de uma cadeia de Markov

$$\mathbf{P} = (p_{ij}, i, j = 0, 1, 2) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}. \text{ Classes de comunicação são:}$$

- a)  $\{0, 1, 2\}$ ;
- b)  $\{0\}, \{1, 2\}$ ;
- c)  $\{0, 1\}, \{2\}$ ;
- d)  $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ ;
- e)  $\{0, 2\}, \{1\}$ .

2. Seja  $Y_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ ,  $Y_n \sim B(p)$ . Criamos outra sequência,  $X_n$  de forma recursiva:  $X_0 \sim B(1/2)$ ,  $X_n = \max(X_{n-1}, Y_n)$ . Sabemos que  $X_n$  é cadeia de Markov, com conjunto de estados  $E = \{0, 1\}$ , distribuição inicial  $\alpha$  e matriz de transição  $\mathbf{P} = (p_{ij}, i, j \in E)$  em que

- a)  $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{P} = (p_{11} = 1/2, p_{12} = 1/2, p_{21} = 0, p_{22} = 1)$ ;
- b)  $\alpha = (p, 1 - p)$ ,  $\mathbf{P} = (p_{00} = \frac{1}{2}, p_{01} = \frac{1}{2}, p_{10} = 1 - p, p_{11} = p)$ ;
- c)  $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{P} = (p_{00} = 1 - p, p_{01} = p, p_{10} = 0, p_{11} = 1)$ ;
- d)  $\alpha = (1 - p, p)$ ,  $\mathbf{P} = (p_{00} = 1/2, p_{01} = 1/2, p_{10} = 0, p_{11} = 1)$ ;
- e)  $\alpha = (p, 1 - p)$ ,  $\mathbf{P} = (p_{00} = 1 - \frac{p}{2}, p_{01} = \frac{p}{2}, p_{10} = 0, p_{11} = 1)$ .

3. Para matriz de transições  $\mathbf{P} = (p_{ij}, i, j = 1, 2) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ , seja  $p_{ij}^{(n)}$  a probabilidade de cadeia sair de estado  $i$  e estar em estado  $j$  depois de  $n$  passos. Escolha alternativa correta

- a)  $p_{11}^{(2)} = \frac{1}{3}$ ;
- b)  $p_{12}^{(2)} = \frac{4}{9}$ ;
- c)  $p_{11}^{(2)} = \frac{4}{9}$ ;
- d)  $p_{21}^{(2)} = \frac{1}{3}$ ;
- e) nenhuma das alternativas anteriores.

4. Para matriz de transição do item anterior  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$  achar a distribuição estacionária  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ , se ela existe.

- a) todas as distribuições do tipo  $\pi_1 = x, \pi_2 = 1 - x, x \in [0,1]$  são distribuições estacionárias;
- b)  $\pi_1 = 1/2, \pi_2 = 1/2$ ;
- c)  $\pi_1 = 2/3, \pi_2 = 1/3$ ;
- d)  $\pi_1 = 1/3, \pi_2 = 2/3$ ;
- e) a cadeia é redutível, por isso, não existe a distribuição estacionária para essa cadeia.

5.  $X_n$  é um passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$ :  $X_{n+1} = X_n + 1$  com probabilidade  $p$ , e,  $X_{n+1} = X_n - 1$  com probabilidade  $q = 1 - p$ . Supondo  $X_0 = 1$ , a probabilidade  $P(X_4 = 1)$  é igual

- a)  $6p^2(1 - p)^2$ ;
- b)  $2p^1(1 - p)^3$ ;
- c)  $2p^3(1 - p)^1$ ;
- d)  $4p^2(1 - p)^2$ ;
- e) nenhuma das alternativas anteriores.

6. A Maria joga melhor de que João. Chance de ganhar numa jogada para Maria é 4 contra 1. Eles tem em total 5 reais. Jogador ganha o jogo se ele fica com todo dinheiro e depois disso o jogo termina. Em uma jogada aposta-se somente um real. Para igualar as chances de ganhar o jogo a banca do João ficou com 4 reais quando a Maria ficou com 1 real. Com a esta divisão

- a) as chances de ganhar o jogo são iguais;
- b) Maria ganha o jogo com probabilidade menor de que 0.5;
- c) com 70% a Maria ganha o jogo;
- d) Maria ganha o jogo com probabilidade menor de que 0.7, mas maior de que 0.5;
- e) Maria ganha o jogo com probabilidade maior que 0.7.

7. Seja  $X_n$  uma cadeia de Markov com conjunto de estados  $E = \{0,1,2\}$ , e com seguintes probabilidades de transição:  $p_{01} = p_{21} = 2/3$ ,  $p_{00} = p_{22} = 1/3$  e  $p_{10} = p_{12} = 1/2$ . Achar  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ , a medida invariante deste processo. A cadeia é reversível?

- a) reversível, e  $\pi_0 = \frac{3}{5}, \pi_0 \neq \pi_2$ ;
- b) não reversível, e  $\pi_0 = \pi_2 = \frac{1}{5}$ .
- c) reversível, e  $\pi_0 = \pi_2 = \frac{3}{10}$ ;
- d) não reversível porque  $p_{01} \neq 0$ , e  $\pi_0 = \frac{3}{5}$ ;
- e) nenhuma das alternativas anteriores.

8. Consideramos a cadeia  $X_n$  do item 7 anterior. Escolha alternativa correta:

- a) a cadeia é redutível e periódica;
- b) o estado 0 é transitório, estado 1 é recorrente, estado 2 é transitório;
- c) a cadeia é irredutível e aperiódica;
- d) a cadeia é transitória, ou seja, todos os estados dela são transitórios;
- e) nenhuma das alternativas anteriores.

9. Seja  $X_n$  a cadeia do item 7. Consideramos seguinte sequência  $Y_n$ :  $Y_n = 0$  se  $X_n = 0$  ou  $X_n = 2$ , e  $Y_n = 1$  se  $X_n = 1$ . Escolha alternativa correta:

- a)  $Y_n$  não forma cadeia de Markov;
- b)  $Y_n$  é cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbf{P} = \left( p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{4}{3}, p_{10} = \frac{1}{2}, p_{11} = \frac{1}{2} \right)$ ;
- c)  $Y_n$  é cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbf{P} = \left( p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{2}{3}, p_{10} = 0, p_{11} = 1 \right)$ ;
- d)  $Y_n$  é cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbf{P} = \left( p_{00} = \frac{2}{3}, p_{01} = \frac{1}{3}, p_{10} = \frac{1}{2}, p_{11} = \frac{1}{2} \right)$ ;
- e)  $Y_n$  é cadeia de Markov com matriz de transição  $\mathbf{P} = \left( p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{2}{3}, p_{10} = 1, p_{11} = 0 \right)$ .

10. Uma cadeia  $X_n$  quando está no estado  $i \in \{1, 2, \dots\} =: \mathbb{N}$  com probabilidade  $\frac{1}{3}$  pula para o estado  $i + 1$  e com probabilidade  $\frac{2}{3}$  vai para o estado  $i - 1$ . Se a cadeia está no estado 0, com a probabilidade  $\frac{1}{3}$  ela pula para estado 1, e permanece no mesmo estado com probabilidade  $\frac{2}{3}$ . Sabe-se que a cadeia é reversível. A sistema de equações correspondente para medida invariante  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  e a solução são

- a) a cadeia é transitória, por isso não há medida invariante, ou seja todos  $\pi_i = 0, i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ;
- b)  $\pi_i = 3\pi_{i+1}/2, i \in \mathbb{N}, \pi_0 = \pi_1$ , assim  $\pi_0 = \frac{1}{2}, \pi_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i, i \in \mathbb{N}$ ;
- c)  $\pi_i = 2\pi_{i+1}/3, i \in \mathbb{N}, 3\pi_0 = 2\pi_1$ , assim  $\pi_0 = \frac{1}{4}, \pi_i = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{i+3}, i \in \mathbb{N}$ ;
- d)  $\pi_i = 2\pi_{i+1}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , assim  $\pi_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ;
- e) nenhuma das alternativas anteriores.

**Algumas fórmulas úteis.****Medidas invariantes**

seja  $\pi = (\pi_i, i \in E)$  medida invariante então  $\pi_i = \sum_{k \in E} \pi_k p_{ki}$ ; cadeia é reversível se  $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$  para  $i \neq j \in E$  quaisquer.

**Ruína de jogador**

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{i}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$