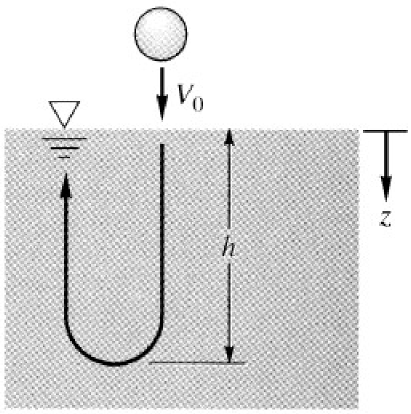
Trabalho 2

Problema 7.98 – White (adaptado): Uma esfera de massa específica ρ_S penetra em um líquido de massa específica ρ com velocidade inicial V_o. Como $\rho_S < \rho$ (ou seja, a esfera é dotada de poder de flutuação), o objeto atinge uma profundidade máxima h e depois retorna para a superfície.

Dado que a esfera possui diâmetro D, volume $\forall$, massa m e peso P, o empuxo do fluido (peso do fluido deslocado pela esfera) é E, a área frontal da esfera é A e o coeficiente de arrasto da esfera é assumido aproximadamente constante durante o fenômeno e é dado por C_D, pedem-se:



a)Com o referencial z adotado para baixo, mostre que a segunda lei de Newton aplicada para a esfera resulta:

$$m\frac{dV}{dt} = P - E - \frac{1}{2}\rho V^2 A C_D$$

b)Lembrando que a área frontal da esfera é $A = \pi R^2$ e o volume é $\forall = 4\pi R^3/3$, onde $R = D/2$, e considerando g a aceleração da gravidade, mostre que a equação anterior resulta:

$$\frac{dV}{dt} = -g\left(\frac{\rho}{\rho_S} - 1\right) - \frac{3}{4}\frac{\rho}{\rho_S}\frac{C_D}{D}V^2$$

c)Considerando um tempo t tal que em $t=0$ a esfera penetra no líquido com velocidade $V=V_o$, escreva a equação anterior como:

$$\frac{dV}{dt}=\alpha+\beta V^2$$

Mostre que a solução dessa equação é:

$$V=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,tg\left[\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\;t+arc\,tg\left(\frac{V_o}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)\right]$$

Onde:

$$\alpha=-g\left(\frac{\rho}{\rho_s}-1\right) \qquad \text{e} \qquad \beta=-\frac{3}{4}\frac{\rho}{\rho_s}\frac{C_D}{D}$$

Dica: use $\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right)+C$

d)Fazendo:

$$\frac{dz}{dt}=V$$

Mostre que:

$$\frac{dz}{dV}=\frac{V}{\alpha+\beta V^2}$$

e)Lembrando que para $V = V_o$ temos $z = 0$, mostre que a equação anterior resulta:

$$z = \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{V^2 + \frac{\alpha}{\beta}}{V_o^2 + \frac{\alpha}{\beta}} \right)$$

Dica: use $\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + a^2\right) + C$

f)Mostre que a profundidade máxima h atingida pela esfera é:

$$h = \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{V_o^2 + \frac{\alpha}{\beta}} \right)$$

Mostre que o tempo T que a esfera leva para atingir essa profundidade é:

$$T = -\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \, arc\,tg\left(\frac{V_o}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)$$

g)Todo esse método analítico de solução só serve para a premissa de que a esfera está afundando no líquido. Suponha que quiséssemos obter uma solução englobando o processo de retorno da esfera até a superfície.

Faça a solução numérica das equações:

$$\frac{dz}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha + \beta \left|V\right| V$$

Note que a substituição do quadrado da velocidade pelo produto entre a velocidade e seu módulo serve justamente para capturar o processo em que a esfera volta à superfície, pois a força de arrasto inverte seu sinal junto com a inversão de sinal da velocidade. Use um método numérico qualquer (Runge-Kutta de 2ª ordem, Runge-Kutta de 4ª ordem, Euler, etc) e qualquer método de solução (matlab e derivados, Excel, programas em c++, fortran, python, etc).

Por exemplo, usando um método de Euler de 1ª ordem, teríamos condições iniciais $z(t=0)=0$ e $V(t=0)=V_o$, e o processo de solução seria:

$$\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = V(t)$$

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \alpha + \beta \left|V(t)\right| V(t)$$

Primeiramente, obtenha a profundidade máxima h e o tempo T da solução analítica do item (f) para uma esfera de diâmetro $D = 5\,\text{cm}$ e coeficiente de arrasto $C_D = 0{,}47$, com:

$$\frac{\rho}{\rho_S} = 1{,}1 + 0{,}4 \times 1^{\text{o}} \text{ algarismo do Número USP}$$

$$V_o = 1{,}0 + 0{,}1 \times 2^{\text{o}} \text{ algarismo do Número USP (m/s)}$$

Para um tempo total $t_{final} = 2T$, faça a solução numérica e verifique a diferença entre h e T obtidos analiticamente e sua solução numérica. Compare graficamente o deslocamento $z(t)$ obtido numericamente com o resultado analítico para $t \leq T$.

Exemplo: Se $\rho / \rho_s = 1{,}1$ e $V_o = 1\,\text{m/s}$:

$$\alpha = -g\left(\frac{\rho}{\rho_s} - 1\right) = -9{,}8 \times (1{,}1 - 1) = -0{,}98\,\text{m/s}^2$$

$$\beta = -\frac{3}{4}\frac{\rho}{\rho_s}\frac{C_D}{D} = -\frac{3}{4} \times 1{,}1 \times \frac{0{,}47}{0{,}05} = -7{,}755\,\text{m}^{-1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0{,}1264\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 0{,}3555\,\text{m/s}$$

$$h = \frac{1}{2\beta}\ln\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{V_o^2 + \frac{\alpha}{\beta}}\right) = -\frac{1}{2 \times 7{,}755}\ln\left(\frac{0{,}1264}{1^2 + 0{,}1264}\right) = 0{,}1410\,\text{m}$$

$$T = -\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\,arc\,tg\left(\frac{V_o}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\right) = \frac{1}{7{,}755 \times 0{,}3555}\,arc\,tg\left(\frac{1}{0{,}3555}\right) = 0{,}4459\,\text{s}$$

(lembrar que o arc tag tem que estar em <u>radianos</u>!)

Assim, as equações a serem resolvidas ficam:

$$\frac{dz}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = -0{,}98 - 7{,}755|V|V$$

Enviar a solução em um arquivo compactado com nome T2_NUSP (onde NUSP é seu número USP) para fsaltara@usp.br. No arquivo compactado devem estar o relatório em pdf e eventuais arquivos auxiliares (planilha excell, arquivo matlab .m, source files de c++ ou python, listagens, etc).