

# Exercícios – Escoamento Potencial

2ª Questão da P3 (Mecânica 2017)

2ª Questão da P3 (Mecânica 2016)

Problema C8.4 White

1ª Questão da P3 (Naval 2015)

Problema P8.50 White

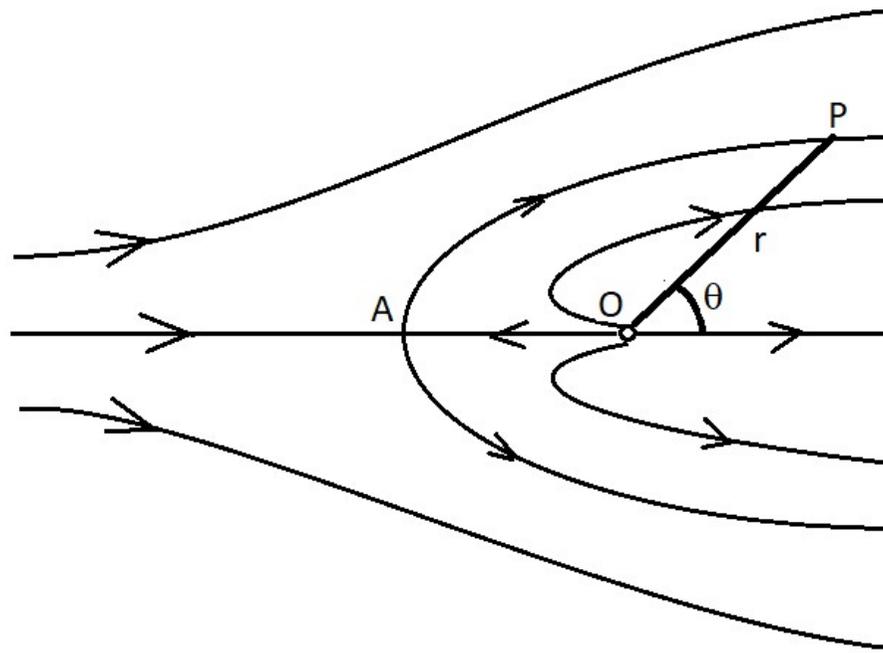
Problema Complementar

**2ª Questão (P3 2017 Mecânica):** Uma descarga de água contaminada num rio é representada por uma fonte de intensidade  $q$  no ponto  $O$  combinada com uma corrente de velocidade uniforme  $U$ , formando a região contaminada delimitada pela linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação  $A$ . Seja  $P$  um ponto qualquer sobre essa linha de corrente. Se chamarmos de  $\Delta$  à distância entre  $A$  e  $O$ , pedem-se:

a) Calcule  $\Delta$  em função de  $q$  e  $U$ .

b) Mostre que as coordenadas  $r$  e  $\theta$  do ponto  $P$  são dadas por

$$r = \frac{q}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}$$



$$\text{Dados: } \psi_{\text{corrente}} = U r \sin \theta \quad ; \quad \psi_{\text{fonte}} = \frac{q \theta}{2\pi}$$

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

## Solução:

a) A função de corrente resultante da superposição de corrente uniforme com fonte é:

$$\psi = U r \operatorname{sen} \theta + \frac{q \theta}{2\pi}$$

As velocidades resultam:

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos \theta + \frac{q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \operatorname{sen} \theta$$

No ponto de estagnação temos  $r = \Delta$ ,  $\theta = \pi$  e ambas as componentes da velocidade tem que ser nulas. Como  $\sin \pi = 0$ , a velocidade  $v_\theta$  é nula. Da velocidade  $v_r$ :

$$U \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \frac{q}{2\pi \Delta} = 0$$

Isso resulta:

$$\Delta = \frac{q}{2\pi U}$$

b) Da expressão da função de corrente, como no ponto de estagnação temos  $r = \Delta$  ,  $\theta = \pi$  resulta para a linha de corrente que passa por esse ponto:

$$\psi = U \underbrace{\Delta \operatorname{sen} \pi}_0 + \frac{q\pi}{2\pi}$$

Assim:

$\boxed{\psi = \frac{q}{2}}$  é a linha de corrente passando pelo ponto de estagnação.

Porém, para um ponto  $P$  qualquer sobre essa linha de corrente:

$$\frac{q}{2} = U r \operatorname{sen} \theta + \frac{q \theta}{2 \pi}$$

Que resulta:

$$U r \operatorname{sen} \theta = \frac{q}{2} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$$

E isso vai resultar:

$$r = \frac{q}{2 \pi U} \frac{\pi - \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

**2ª Questão (P3 Mecânica 2016)** Um tornado pode ser idealizado como um sistema de vórtice potencial e sumidouro com um núcleo rotacional de raio  $r_0$  que se comporta como um corpo sólido ( $v_\theta = \omega r$ ), onde  $\omega$  é a velocidade angular. Para  $r \geq r_0$ , a velocidade é aquela induzida pelo sistema vórtice-sumidouro. Admitindo-se que o raio do núcleo do tornado é  $r_0 = 20\text{ m}$  e que o módulo da velocidade do vento para esse raio é  $V_0 = 180\text{ km/h}$ , com essa velocidade fazendo um ângulo  $\beta = 60^\circ$  com a direção radial e supondo  $\rho = 1,20\text{ kg/m}^3$ , pede-se determinar:

- a) A circulação  $\Gamma$  do vórtice e a vazão por unidade de comprimento  $q$  do sumidouro;
- b) A velocidade angular  $\omega$  do núcleo;
- c) A pressão manométrica em torno do núcleo ( $r = r_0$ ).

## Solução

A superposição do sumidouro com o vórtice resulta um campo de velocidades dado por:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Em  $r = r_0 = 20$  m, as velocidades são:

$$v_r = -\frac{180000}{3600} \cos 60^\circ = -25 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = \frac{180000}{3600} \text{sen } 60^\circ = 43,3 \text{ m/s}$$

Assim, temos:

$$q = -25 \times 2 \times \pi \times 20 = -3141,6 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\Gamma = 43,3 \times 2 \times \pi \times 20 = 5441,3 \text{ m}^2/\text{s}$$

A velocidade angular no núcleo será:

$$\omega = \frac{43,3}{20} = 2,165 \text{ rad/s}$$

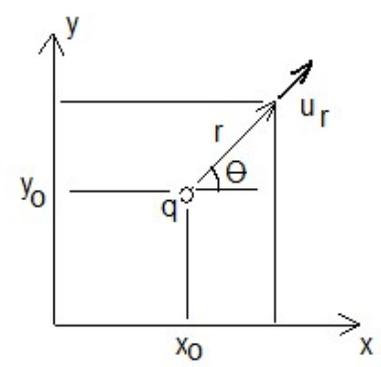
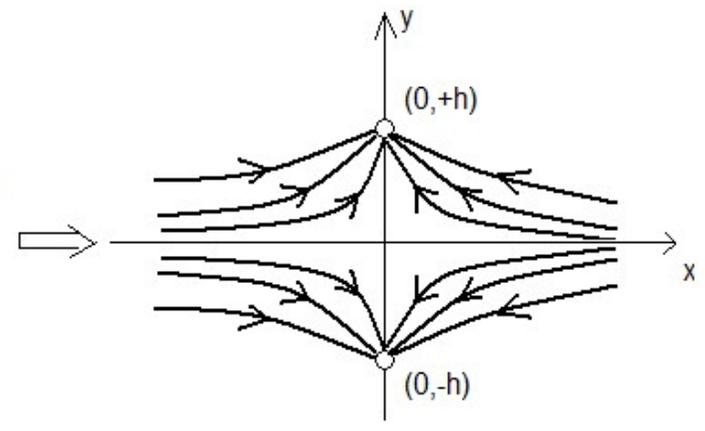
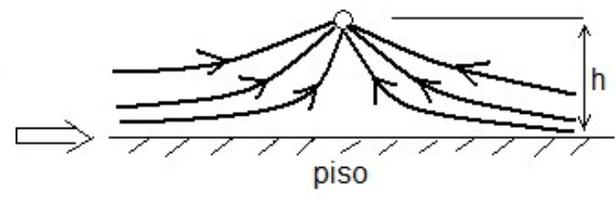
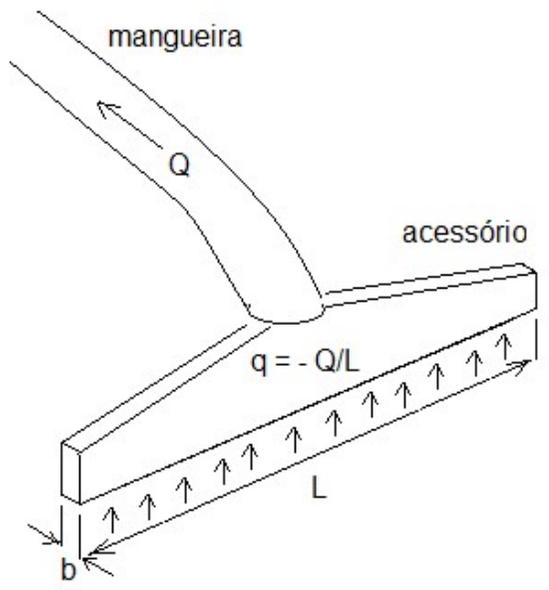
Se a pressão ao longe, com ar parado, for a pressão atmosférica, a pressão efetiva (manométrica) em  $r = r_0$  será:

$$p = -\frac{\rho V_0^2}{2}$$

Logo:

$$p = -\frac{1,2 \times \left(\frac{18000}{3600}\right)^2}{2} = -1500 \text{ Pa}$$

C8.4) Um acessório de um aspirador de pó doméstico é constituído de um bocal convergente com uma fresta de aspiração de comprimento  $L$  e largura  $b$ . Podemos representar o escoamento causado pelo acessório através de um sumidouro de intensidade  $q = -Q/L$  colocado a uma distância  $h$  do piso. Para representar o efeito do piso, o escoamento acaba sendo representado por dois sumidouros, um na posição  $x=0, y=+h$  e o outro na posição  $x=0, y=-h$ .



a) Uma fonte ou sumidouro de intensidade  $q$  localizada em  $x_o$ ,  $y_o$  provoca num ponto qualquer de coordenadas  $x$ ,  $y$  uma velocidade radial dada por  $u_r = \frac{q}{2\pi r}$ . Verifique que as componentes  $x$  e  $y$  dessa velocidade são dadas por:

$$u = \frac{q(x - x_o)}{2\pi \left[ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \right]}$$

$$v = \frac{q(y - y_o)}{2\pi \left[ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \right]}$$

b) Dada a superposição dos dois sumidouros, obtenha as expressões das velocidades  $u$  e  $v$  para  $y=0$  (no piso) em função de  $q$ ,  $h$  e  $x$ .

c) Verifique qual a posição  $x$  ao longo do piso para a qual temos velocidade máxima em módulo, ou seja, maior eficiência para arrastar partículas, e determine a expressão dessa velocidade máxima em função de  $q$  e  $h$ . Por que não se deve colocar a fresta do acessório diretamente acima da sujeira que se quer aspirar?

**Solução:**

a)

$$u = u_r \cos \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{x - x_o}{r} = \frac{q(x - x_o)}{2\pi r^2} = \frac{q(x - x_o)}{\underline{\underline{2\pi[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]}}}$$

$$v = u_r \sin \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{y - y_o}{r} = \frac{q(y - y_o)}{2\pi r^2} = \frac{q(y - y_o)}{\underline{\underline{2\pi[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]}}}$$

b)

A superposição dos dois sorvedouros, um em  $(0, +h)$  e o outro em  $(0, -h)$ , resulta, para  $u$ :

$$u = \frac{q(x-0)}{2\pi[(x-0)^2 + (y-(+h))^2]} + \frac{q(x-0)}{2\pi[(x-0)^2 + (y-(-h))^2]}$$

$$u = \frac{qx}{2\pi[x^2 + (y-h)^2]} + \frac{qx}{2\pi[x^2 + (y+h)^2]}$$

A superposição resulta, para  $v$ :

$$v = \frac{q(y - (+h))}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (+h))^2]} + \frac{q(y - (-h))}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (-h))^2]}$$

$$v = \frac{q(y - h)}{2\pi[x^2 + (y - h)^2]} + \frac{q(y + h)}{2\pi[x^2 + (y + h)^2]}$$

Para  $y=0$ :

$$\underline{\underline{u = \frac{q x}{\pi [x^2 + h^2]}; v = 0}}$$

Assim, verificamos que a superposição dos dois sorvedouros representa realmente a presença do piso, pois tem o efeito de produzir uma velocidade vertical nula na região onde este está presente.

c) Derivando a velocidade  $u$  em relação à  $x$  para  $y=0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{\pi[x^2 + h^2]} - \frac{qx}{\pi[x^2 + h^2]^2} \times 2x = \frac{q(x^2 + h^2) - 2qx^2}{\pi[x^2 + h^2]^2} = \frac{q(h^2 - x^2)}{\pi[x^2 + h^2]^2}$$

Igualando a zero, temos que os pontos de velocidade máxima e mínima correspondem à  $x = \pm h$ . De fato, quando  $x=+h$ , temos o ponto de velocidade mínima, com  $u = q/2\pi h$  (lembre-se que  $q$  é negativo), e para  $x=-h$  temos a velocidade máxima  $u = -q/2\pi h$ .

Na realidade, os dois pontos correspondem a pontos de módulo da velocidade máxima, e são os pontos para os quais temos maior eficiência para arrastar a sujeira.

Por outro lado, intuitivamente, colocamos a fenda exatamente sobre a sujeira. É um erro, pois para  $x=0$  temos  $u=0$ , ou seja, o módulo da velocidade é mínimo.

Assim, a velocidade máxima em módulo é:

$$\underline{\underline{|u|_{\max} = \frac{|q|}{2\pi h}}}$$

1ª Questão da P3 (Naval 2015): Considere o escoamento potencial ao redor de um cilindro girando. Pergunta-se:

- a) Quais as intensidades  $m$  do dipolo e  $\Gamma$  de um vórtice ideal para se obter o escoamento potencial ao redor de um cilindro de 3,0 metros de diâmetro imerso numa corrente de ar com velocidade uniforme de 100 m/s, com pontos de estagnação a  $45^\circ$  e  $135^\circ$ ?
- b) A que rotação  $\Omega$  em rad/s de um cilindro real equivale a circulação  $\Gamma$  do vórtice?
- c) Se o escoamento ao longe possui uma pressão  $p_o = 1,02 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  e a massa específica  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , qual a pressão nos pontos de estagnação?
- d) Qual a velocidade e a pressão estática na parede do cilindro em  $\theta = 0^\circ$  e em  $\theta = 180^\circ$ ?
- e) Qual o valor teórico da sustentação por unidade de comprimento (módulo, direção e sentido) que age sobre o cilindro?

Dados:

Movimento Uniforme:  $\phi = U_{\infty} r \cos \theta$ ;  $\psi = U_{\infty} r \operatorname{sen} \theta$

Dipolo:  $\phi = \frac{m}{r} \cos \theta$ ;  $\psi = -\frac{m}{r} \operatorname{sen} \theta$

Vórtice Ideal:  $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ ;  $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad v_{\theta} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Bernoulli:  $\rho \frac{U^2}{2} + p = \text{const}$

Teorema de Kutta-Joukowski:  $\frac{L}{b} = -\rho U_{\infty} \Gamma$

## Solução:

a) A função potencial resultante que representa o escoamento é:

$$\phi = U_{\infty} r \cos \theta + \frac{m}{r} \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

As velocidades resultam:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_{\infty} \cos \theta - \frac{m}{r^2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad v_r = \left( U_{\infty} - \frac{m}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$v_{\theta} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -U_{\infty} \operatorname{sen} \theta - \frac{m}{r^2} \operatorname{sen} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad v_{\theta} = - \left( U_{\infty} + \frac{m}{r^2} \right) \operatorname{sen} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Da expressão da velocidade  $v_r$  percebe-se que o raio do cilindro, ou seja, o lugar geométrico onde a velocidade radial é nula (representando o princípio da impermeabilidade) é dado por:

$$r = R = \sqrt{\frac{m}{U_\infty}}$$

Assim, se a velocidade é  $U_\infty=100$  m/s e o raio do cilindro é  $R=D/2=1,5$ m, resulta:

$$m = U_\infty R^2 = 225 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Os pontos de estagnação são determinados para ambas as velocidades nulas. Assim, acharemos os pontos de estagnação em  $r = R$ , o que anula a velocidade  $v_r$ . Para esse raio, a velocidade  $v_\theta$  fica:

$$v_\theta = -2U_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Essa velocidade será nula em:

$$\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R}$$

Logo, a intensidade do vórtice, conhecidos os ângulos dos pontos de estagnação, será:

$$\Gamma = 4\pi U_{\infty} R \sin\theta$$

Para  $U_{\infty}=100$  m/s,  $R=1,5$ m e  $\sin\theta = \sin 45^{\circ} = \sin 135^{\circ} = 0,707$ , temos:

$$\Gamma = 1333 \text{ m}^2 / \text{s}$$

b) A rotação será dada igualando a velocidade tangencial resultante do movimento do cilindro sólido em  $r = R$  com a velocidade induzida pelo vórtice pontual no mesmo raio:

$$\Omega R = \frac{\Gamma}{2\pi R} \Rightarrow \Omega = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \quad \text{logo: } \boxed{\Omega = 94,3 \text{ rad/s}}$$

c) A pressão nos pontos de estagnação será dada pela equação de Bernoulli:

$$\boxed{p_{estag} = \rho \frac{U_\infty^2}{2} + p_\infty = 108000 \text{ Pa}}$$

d) Na parede do cilindro a velocidade  $v_r = 0$  e temos apenas a componente  $v_\theta$ .

$$v_\theta = -2U_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$  a primeira parcela é sempre nula, sobrando apenas a contribuição do vórtice:

$$U = \frac{1333}{2 \times \pi \times 1,5} \Rightarrow \boxed{U = 141 \text{ m/s}}$$

A pressão por se obtida pela equação de Bernoulli:

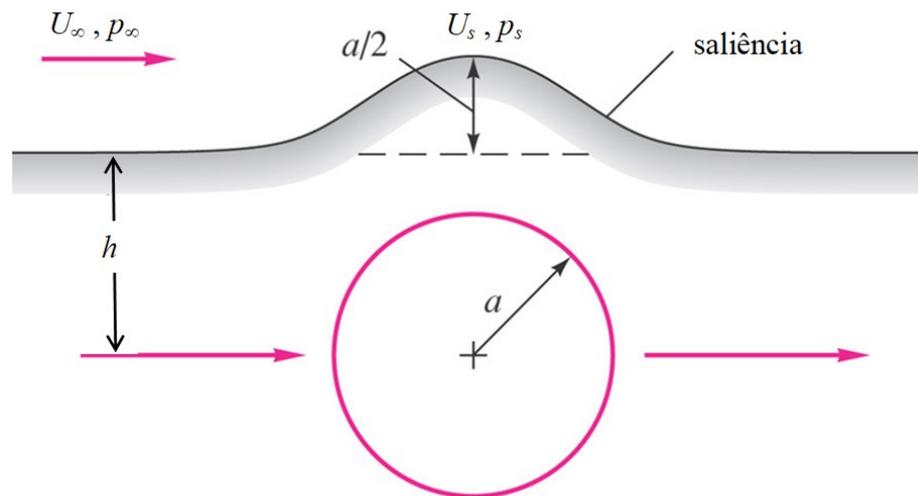
$$p = \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} - \rho \frac{U^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 96071 Pa}$$

e) A sustentação é calculada pelo teorema de Kutta-Joukowski:

$$\frac{L}{b} = -\rho U_{\infty} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{b} = -160000 N/m}, \text{ ou seja, vertical apontando}$$

para baixo

**P8.50)** Deseja-se representar o escoamento em torno de uma colina ou saliência bidimensional usando uma linha de corrente que passa acima do escoamento sobre um cilindro, como na figura. A saliência deve ter altura igual a  $a/2$ , em que  $a$  é o raio do cilindro. Qual é a elevação  $h$  dessa linha de corrente, em uma posição infinitamente afastada da saliência? Quais são a velocidade  $U_s$  e a pressão  $p_s$  na saliência, sabendo que na corrente livre temos  $U_\infty$  e  $p_\infty$ ?



Dados: Função corrente para cilindro de raio  $a$  sem circulação ,  
velocidades e Bernoulli:

$$\psi = U_{\infty} a \operatorname{sen} \theta \left( \frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) \quad ; \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cte}$$

### **Solução:**

Para uma posição infinitamente afastada com elevação  $h$ ,  $r \rightarrow \infty$  e  $r \operatorname{sen} \theta \rightarrow h$ . A função corrente na linha de corrente da saliência vale, então  $\psi_s = U_{\infty} h$ . O valor deve ser o mesmo para a posição da

saliência  $r_s = h + \frac{1}{2} a$  ,  $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ :

$$\psi_s = U_\infty h = U_\infty a \left( \frac{h + \frac{1}{2}a}{a} - \frac{a}{h + \frac{1}{2}a} \right) \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$h = \frac{3}{2}a \Rightarrow r_s = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a$$

A distribuição de velocidade resulta:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Na saliência, obtemos:  $v_{r_s} = 0 \quad ; \quad v_{\theta_s} = -U_\infty \left( 1 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{5}{4} U_\infty$

Por Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_s + \frac{1}{2} \rho (v_{r_s}^2 + v_{\theta_s}^2) = p_s + \frac{1}{2} \rho \frac{25}{16} U_\infty^2$$

Assim:  $p_s - p_\infty = -\frac{9}{32} \rho U_\infty^2$

Problema Complementar: Dado o escoamento:

$$u = a(x^2 - y^2); v = -2axy; w = 0$$

- a) Verifique se é possível definir um potencial de velocidades. Em caso afirmativo, determine esse potencial;
- b) Verifique se é possível definir uma função de corrente. Em caso afirmativo, determine essa função de corrente.

## Solução:

a)

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(x^2 - y^2) & -2axy & 0 \end{vmatrix} = [-2ay - (-2ay)]\vec{e}_z = 0$$

O escoamento é irrotacional, logo podemos definir uma função potencial dada por:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = u dx + v dy + w dz$$

No caso:

$$d\phi = a(x^2 - y^2)dx - 2axy dy$$

Podemos integrar num caminho arbitrário entre os pontos  $(0,0)$  e  $(x,y)$ . Vamos tomar um caminho entre  $(0,0)$  e  $(x,0)$  (ou seja,  $y$  constante e nulo) seguido de um caminho entre  $(x,0)$  e  $(x,y)$  (ou seja,  $x$  constante e arbitrário):

$$\int_{0,0}^{x,y} d\phi = \int_{0,0}^{x,0} a(x^2 - y^2)dx - \int_{x,0}^{x,y} 2axy dy$$

Isso resulta:

$$\phi(x, y) - \phi(0,0) = \left[ a \left( \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \right]_{0,0}^{x,0} - \left[ 2ax \frac{y^2}{2} \right]_{x,0}^{x,y}$$

Que resulta:

$$\phi = \phi_o + a \frac{x^3}{3} - axy^2$$

b)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [a(x^2 - y^2)] + \frac{\partial}{\partial y} (-2axy) = 2ax - 2ax = 0$$

O escoamento é bidimensional e incompressível, logo podemos definir uma função de corrente.

Temos que:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

Isso resulta:

$$d\psi = 2axy dx + a(x^2 - y^2) dy$$

Repetindo o caminho de integração usado para a função potencial:

$$\int_{0,0}^{x,y} d\psi = \int_{0,0}^{x,0} 2axy dx + \int_{x,0}^{x,y} a(x^2 - y^2) dy$$

Isso resulta:

$$\psi(x, y) - \psi(0,0) = \left[ \frac{2ax^2y}{2} \right]_{0,0}^{x,0} + \left[ a \left( x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \right]_{x,0}^{x,y}$$

Finalmente, obtemos:

$$\psi = \psi_o + ax^2y - a\frac{y^3}{3}$$

## **Bibliografia:**

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 7º edição, Ed. McGraw Hill, 2011.