SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS-MAT 450

3^a lista (PIF) - 1^o semestre de 2020

Antônio Luiz Pereira

(1) Quando um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de comprimento 3,4 e 5 écortado por um plano, podemos ter seções de diversos formatos como, por exemplo, retângulos como o ilustrado na figura.
(a) As seções podem triângulo equiláteros?
(b) As seções podem ser quadrados?
(c)) Qual éo triângulo de maior área que pode ser formado?
(d) Qual éo retângulo de maior área que pode ser formado?

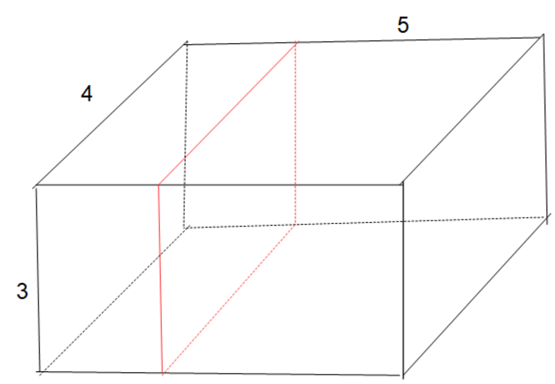


FIGURE 1. Paralelepípedo

(2) Uma aranha vivia na superfície do cubo. Estando um dia sobre uma das faces, percebeu que na face oposta estava pousada uma mosca, conforme indicado na figura. Qual deve ser o trajeto da aranha, de modo a atingir a mosca, percorrendo a menor distância possıhvel?

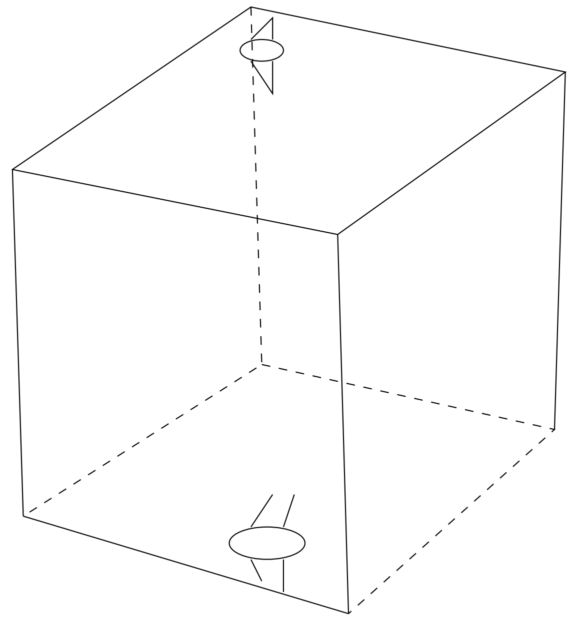


FIGURE 2. Aranha

(3) Calcule a área hachurada, entre um quadrado e um triângulo equilátero, ambos de lado a:

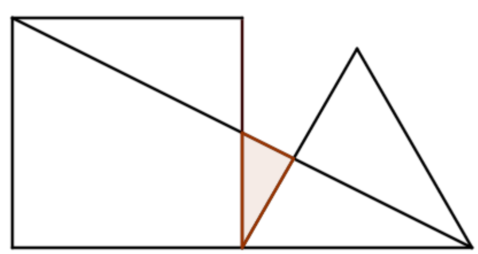


FIGURE 3. triângulo-quadrado

(4) Cinco esferas de raio r estão dentro de um cone circular reto da seguinte maneira: 4 delas tangenciam a base do cone e a, a superfície lateral e cada uma dessas quatro tangencia duas das outras, a 5^a esfera tangencia as quatro primeiras e a superfí cie lateral do cone. Calcule o volume do cone.

(5) Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero. Mostre que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é constante.

(6) Dado um pentágono regular de lado 1, encontre uma equação quadrática cuja raiz positiva seja a diagonal do pentágono.

(7) É dado um quadrado. Encontre o lugar geométrico dos pontos de onde o quadrado é visto sob um ângulo de a) 90^0, b)45^0. (Se P é um ponto exterior ao quadrado, mas no mesmo plano, o menor ângulo com vértice P que contem o quadrado é o 'ângulo sob o qual o quadrado é visto' de P'). Esboce ambos os lugares geométricos e justifique.

(8) Mostre que as bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um ponto (este ponto é denominado *incentro* do triângulo). Enuncie e mostre resultados análogos para as alturas, medianas e mediatrizes.

(9) (*O problema das pontes de Könisberg*) Imagine um rio, com duas margens A e B e duas ilhas C e D. A ilha C está ligada a cada uma das duas margens por duas pontes, a ilha D está ligada a cada uma das margens por uma ponte e há uma ponte ligando as duas ilhas (veja figura 9). É possível, saindo das ilhas ou de qualquer das margens, percorrer todas as pontes, sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas?

(10) **(3 pontos)** Considere um quadrilátero $ABCD$ qualquer. Sejam M, N, P e Q os pontos médios de seus lados.
   (a) Demostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo, qualquer que seja o quadrilátero $ABCD$.
   (b) Dobre o triângulo AMQ para dentro do quadrilátero, em torno de $\overline{MQ}$. Agora faça o mesmo com os triângulos BMN, CPN e DPQ. Encontre uma condição necessária e suficiente, a ser satisfeita pelo quadrilátero $ABCD$, para que os pontos A, B, C e D, após as dobraduras, venham a coincidir. Justifique.

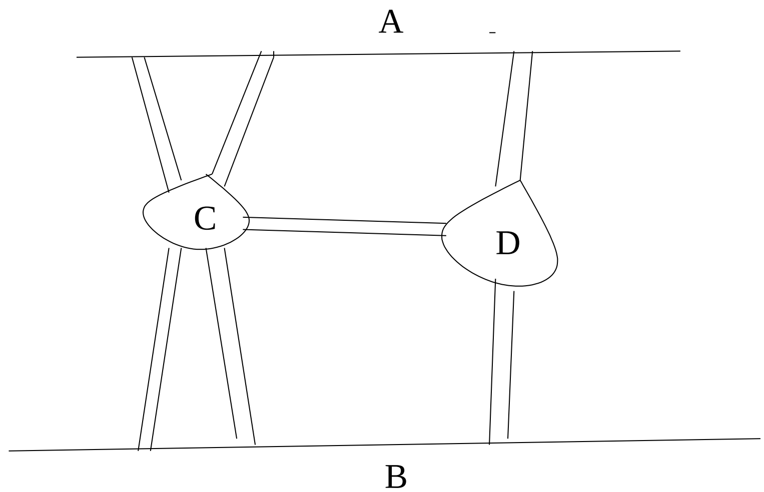
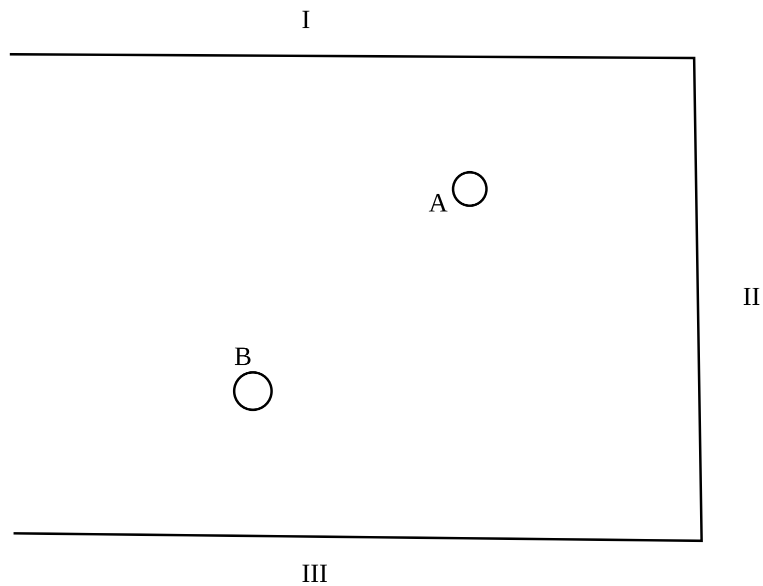


Figure 4. Pontes de Könisberg

(11) Com uma tacada, levar a bola A até a bola B ricocheteando antes nas tabelas I, II e III.



(12) No triângulo ABC , a altura e a mediana relativas ao vértice A dividem o ângulo $\widehat{BAC}$ em três ângulos de mesma medida.Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC .

(13) Pelo ponto médio M do lado BC de um quadrilátero $ABCD$, traçar a reta que divide esse quadrilátero em duas partes de mesma área. (Sugestão: na figura os triângulos MBF e MCF têm a mesma área.

Basta construir F de tal modo que os triângulos ABF e CDF tenham a mesma área).

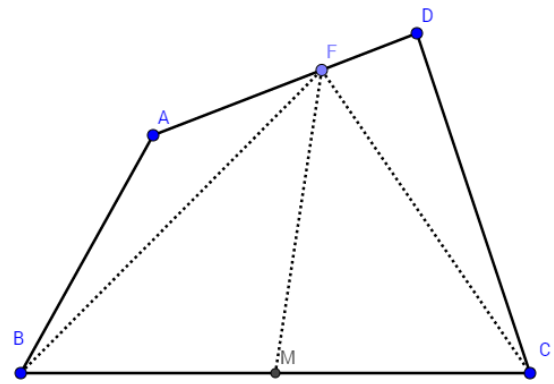


FIGURE 5. Ex13

(14) Num quadrado de lado a, traçamos por cada vértice um círculo de raio a. Ache a área da interseção de todos os círculos.

(15) Na lousa havia o seguinte desenho: um quadrilátero com lados opostos não paralelos entre si e um paralelogramo com os vértices em lados distintos do quadrilátero. O professor apagou o paralelogramo mas deixou o seu centro O. Como recuperar o paralelogramo? (Sugestão: Na figura 6 construa um paralelogramo com lados AB e AC que tenha M como ponto médio. Lembre-se que as diagonais de um paralelogramo encontram se no meio.)

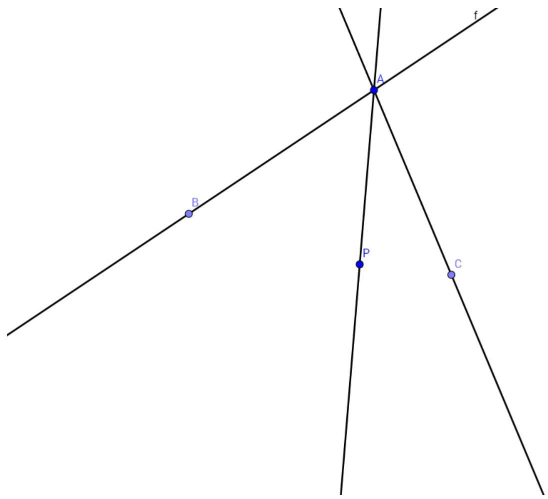


FIGURE 6. sugestex15

(16) Para prolongar uma estrada reta r deve-se perfurar um túnel em um morro. É conveniente que duas equipes trabalhem simultaneamente nos pontos de entrada E e de saída S do túnel. Admitindo que, com exceção do morro, o terreno é plano, descreva um processo pelo qual, sem sair do plano do terreno, é possível marcar o ponto S e a direção r de saída.

(17) Num quadrilátero ABCD de lados não paralelos, junte os lados opostos formando os pontos E e F e tome o ponto médio O de $\overline{EF}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais do quadrilátero. Mostre que M, N e O são colineares.(n]o claro o que significa "juntar os lados opostos", ver figura 7).

(18) Dado um triângulo ABC, seja $P \in AB$ o pé da bissetriz pelo vértice C. Determine o lugar geométrico dos pontos X do plano do triângulo, tais que a bissetriz do ângulo $A\widehat{X}B$ passe por P.(Sugestão: Use o teorema da bissetriz e depois coordenadas, para achar a equaç ão do lugar geométrico).

(19) Para cada vértice de um cubo cuja aresta mede a, considera-se o plano formado pelos extremos das arestas que partem desse vértice. Seja S o sólido limitado por todos esses planos:
(a) Quantos vértices, arestas e faces tem S?

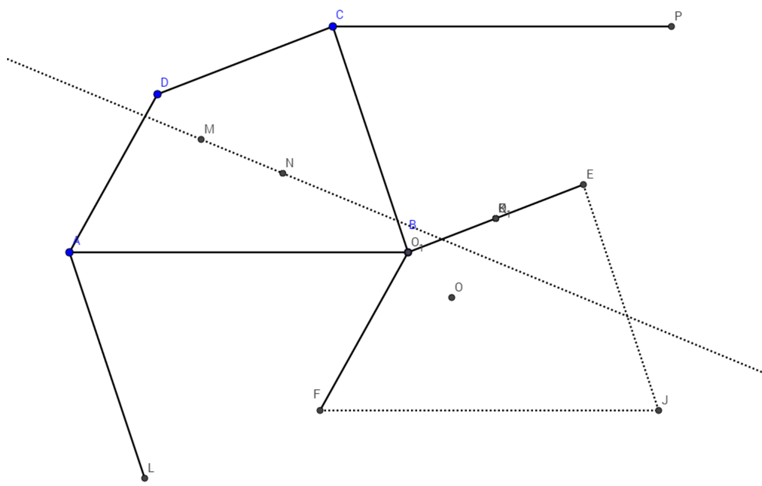


Figure 7. Ex13

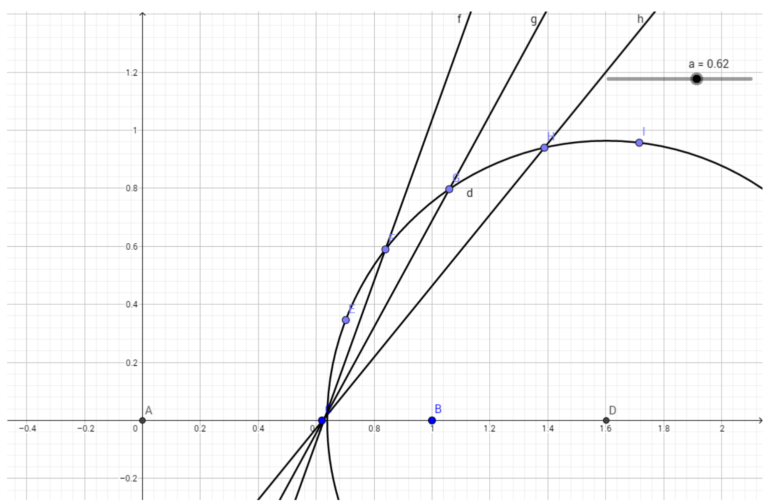


Figure 8. Ex18

(b) Calcule o volume de S.

(20) Num triângulo retângulo, c é o comprimento da hipotenusa, a e b são comprimentos dos catetos e d o diâmetro do círculo inscrito. Prove que $a + b = c + d$.

(21) (OPCIONAL) Mapas planos da Terra podem ser obtidos projetando sua superfície (aproximadamente) esférica em um cilindro cujo eixo de simetria passe pelos polos e tal que o equador concida com uma seção plana perpendicular ao eixo. Dado um ponto A da esfera, existe uma única semi-reta com origem no eixo de simetria do cilindro e perpendicular ao mesmo, passando por A. A projeção de A é o ponto B intersecão da semi-reta com o cilindro (Esta projeção é conhecida como projeção de Mercator). Como se pode perceber nos mapas assim construídos, essa projeção distorce áreas. Calcule a relação entre a área original e a projetada nos casos:
(a) A região entre o equador e o paralelo 30^0 S.
(b) A região entre os paralelos 60^0 S e 90^0 S.