

Escoamento Potencial

Escoamento Potencial

- Escoamento irrotacional
- Invíscido (fluido ideal, $\mu = 0$)



Escoamento externo à camada limite
irrotacional, sem efeitos viscosos → potencial

Função Potencial

Se podemos definir um potencial tal que :

$$\nabla \phi = \vec{u}$$

Ao verificarmos a rotacionalidade do escoamento:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Logo, escoamentos potenciais são irrotacionais.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0 \rightarrow \underline{\underline{\nabla^2 \phi = 0}}$$

A função potencial é uma função harmônica.

Função Potencial

$$\nabla \phi = \vec{u} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w$$

Se a função potencial for uma diferencial exata:

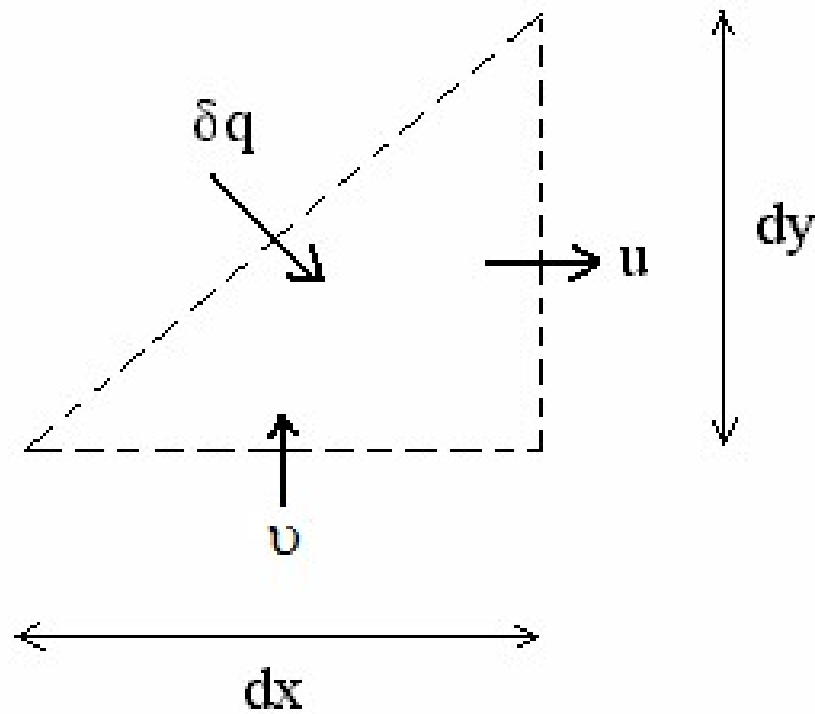
$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \Rightarrow d\phi = u dx + v dy$$

A condição para a função potencial ser uma diferencial exata ou função de ponto é:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial x} v \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \nabla \times \vec{u} = 0$$

Esta é outra forma de verificar a relação entre irrotacionalidade do escoamento e existência da função potencial

Função de corrente



$$\delta q = u dy - v dx = d\psi$$

Função de Corrente

$$d\psi = u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Como o divergente do vetor da velocidade é nulo (continuidade):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

Logo, é possível definir a função de corrente, que será uma função de ponto ou diferencial exata.

Função de Corrente

Se o escoamento for irrotacional:

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

Logo, temos:

$$\underline{\underline{\nabla^2 \psi = 0}}$$

Ou seja, a função de corrente também é uma função harmônica.

Resumo

O escoamento incompressível e irrotacional externo à camada limite pode ser tratado como um escoamento potencial, dado por:

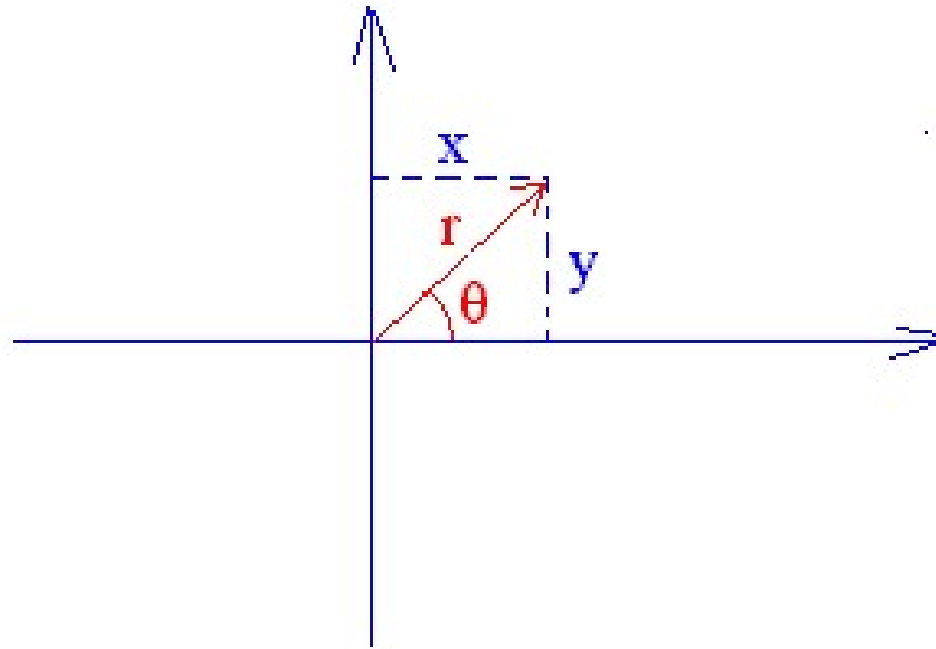
$$\nabla^2 \psi = 0 \quad , \quad \nabla^2 \phi = 0$$

Onde:

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad (3D) \quad \text{ou} \quad \phi = \phi(x, y) \quad (2D)$$

$$\psi = \psi(x, y) \quad (2D)$$

Sistema cilíndrico de coordenadas



$$d\phi = u_r dr + u_\theta r d\theta \quad d\psi = -u_\theta dr + u_r r d\theta$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad u_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Condições de contorno



$$u_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad , \quad u_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

Da condição de impermeabilidade:

$$u_n = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad e \quad \psi = \text{constante}$$

Como estamos ignorando a existência da camada limite, não vale a condição de aderência, ou seja, o fluido escorrega sobre a parede :

$$u_s \neq 0$$

Implicações

Resolver as equações:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \phi = 0$$

Com condições de contorno sobre superfícies sólidas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \text{constante}$$

É **fácil** pelo método dos elementos finitos.

Superposição de escoamentos elementares

Se pudermos escrever a função potencial como uma composição de várias funções potenciais elementares:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

O escoamento resultante também será uma composição dos escoamentos elementares:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 \phi_2 + \nabla^2 \phi_3$$

Analogamente:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = \nabla^2 \psi_1 + \nabla^2 \psi_2 + \nabla^2 \psi_3$$

Alguns escoamentos elementares

1) Corrente Uniforme

2) Fonte ou Sorvedouro

3) Vórtice Pontual

4) Dipolo

Escoamento uniforme

$$u = U_{\infty} \quad v = V_{\infty}$$

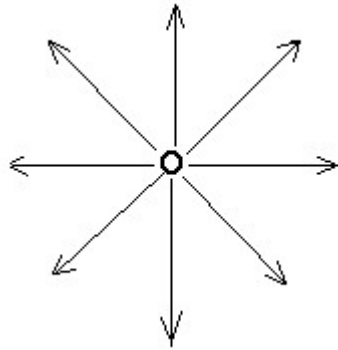
$$d\phi = U_{\infty} dx + V_{\infty} dy \Rightarrow \underline{\underline{\phi = U_{\infty} x + V_{\infty} y}} \quad \text{ou}$$

$$\phi = U_{\infty} r \cos \theta + V_{\infty} r \operatorname{sen} \theta$$

$$d\psi = -V_{\infty} dx + U_{\infty} dy \Rightarrow \underline{\underline{\psi = U_{\infty} y - V_{\infty} x}} \quad \text{ou}$$

$$\psi = U_{\infty} r \operatorname{sen} \theta - V_{\infty} r \cos \theta$$

Fonte ou Sorvedouro



q : intensidade da fonte ou sorvedouro

$q > 0$: fonte

$q < 0$: sorvedouro

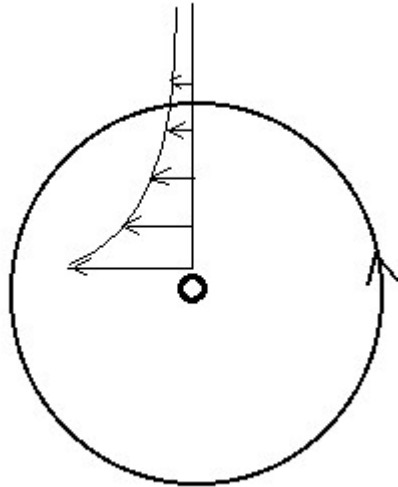
$q < 0$: sorvedouro

$$u_r = \frac{q}{2\pi r} \quad u_\theta = 0$$

$$d\phi = \frac{q}{2\pi r} dr \rightarrow \phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

$$d\psi = \frac{q}{2\pi r} r d\theta \rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

Vórtice pontual



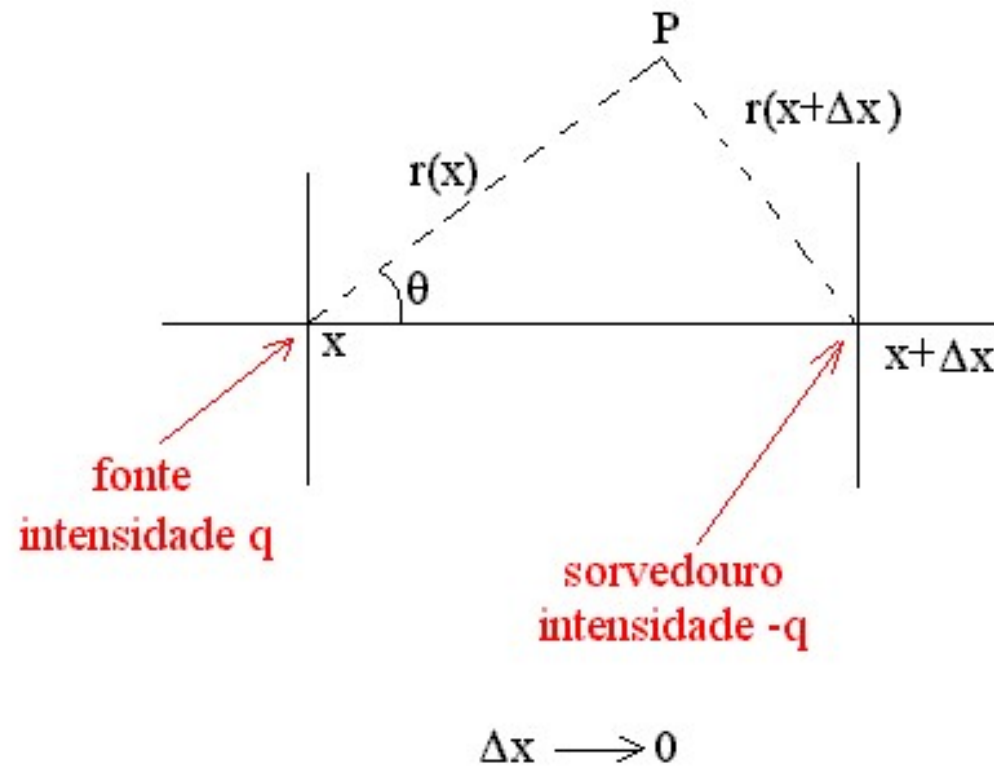
Γ : circulação ou intensidade do vórtice, positiva se anti-horária.

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$d\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta \rightarrow \phi = \underline{\underline{\frac{\Gamma}{2\pi} \theta}}$$

$$d\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi r} dr \rightarrow \psi = \underline{\underline{-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r}}$$

Dipolo (superposição de fonte e sorvedouro)



Dipolo

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r(x) - \frac{q}{2\pi} \ln r(x + \Delta x) \rightarrow \phi = -\frac{q}{2\pi} \frac{\ln r(x + \Delta x) - \ln r(x)}{\Delta x} \Delta x$$

para $\Delta x \rightarrow 0$

$$\phi = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{dx} [\ln r(x)] \Delta x \rightarrow \phi = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{r(x)} \frac{dr(x)}{dx} \Delta x$$

como $r^2(x) = (x_P - x)^2 + y_P^2 \rightarrow \frac{dr}{dx} = -\frac{x_P - x}{r} = -\cos \theta$

resulta $\phi = \frac{q \Delta x \cos \theta}{2\pi r}$; *chamando* $\frac{q \Delta x}{2\pi} = \lambda \rightarrow \phi = \frac{\lambda \cos \theta}{r}$

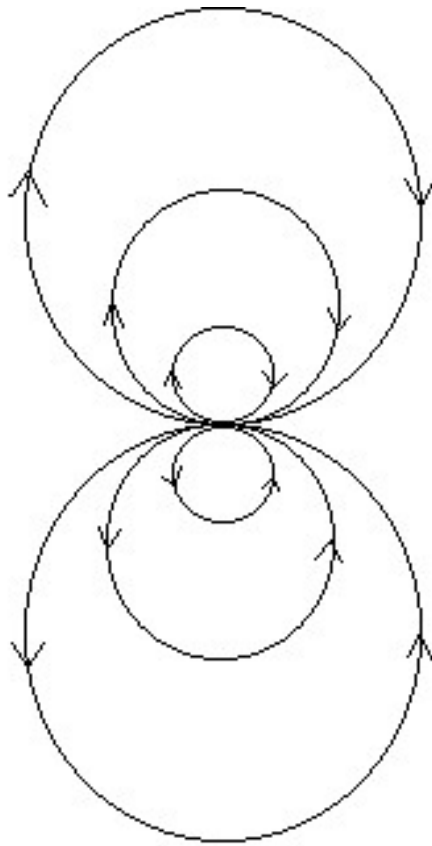
Dipolo

$$\phi = \frac{\lambda \cos \theta}{r} \quad \psi = -\frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{r}$$

$$u_r = -\frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \quad u_\theta = -\frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

Onde λ é a intensidade do dipolo, positiva se a fonte precede o sorvedouro e negativa em caso contrário.

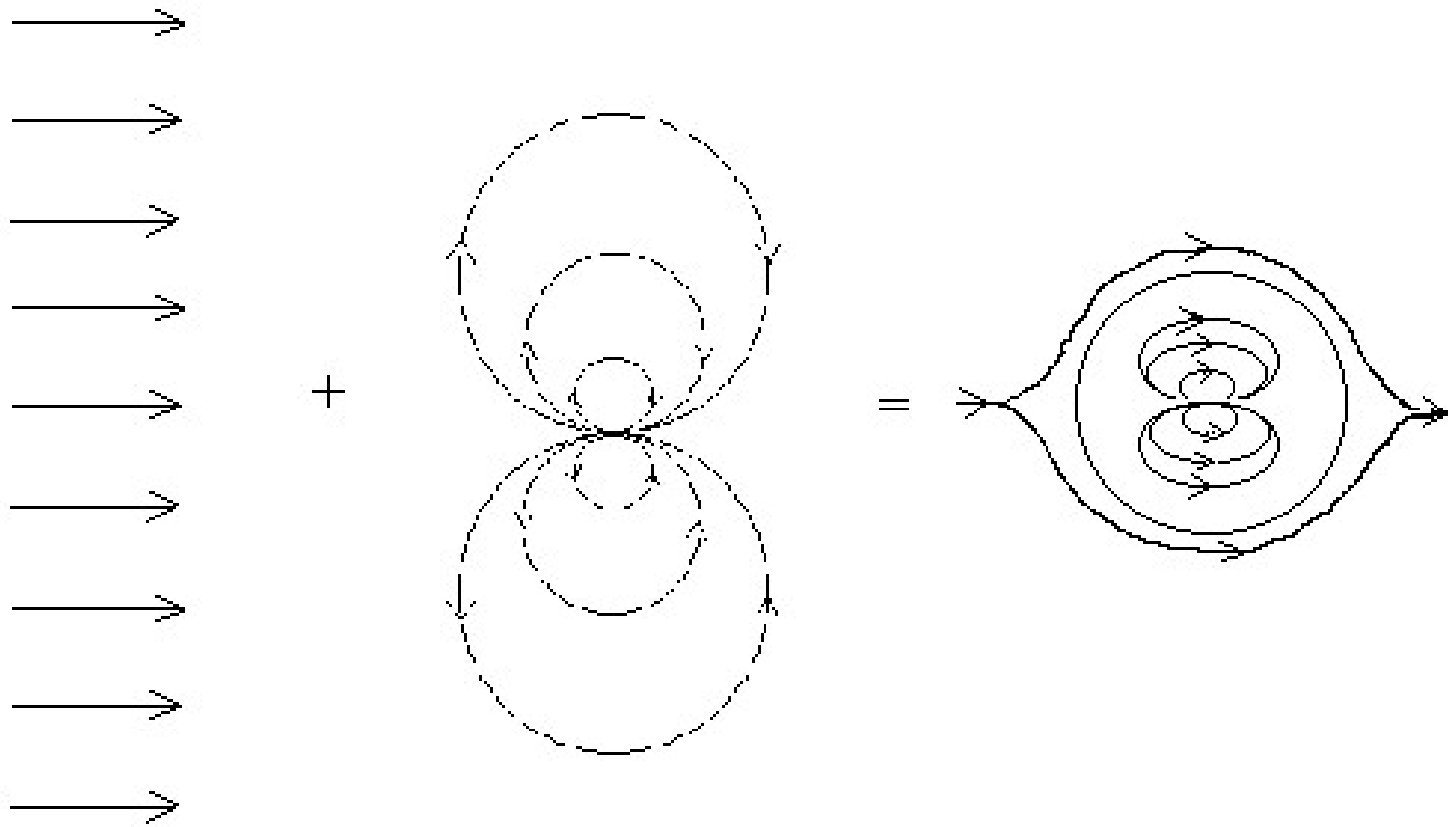
Dipolo



Aparência das linhas de corrente do dipolo

Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

Superposição de escoamento uniforme e dipolo:



Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

A função potencial resulta:

$$\phi = U_{\infty} x + \frac{\lambda \cos \theta}{r} = U_{\infty} \underbrace{r \cos \theta}_x + \frac{\lambda \cos \theta}{r}$$

As velocidades resultam:

$$u_r = U_{\infty} \cos \theta - \frac{\lambda \cos \theta}{r^2}$$

$$u_{\theta} = -U_{\infty} \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

Determinação do raio R do cilindro:

$$u_r(r = R) = 0 \rightarrow \underline{\underline{R = \sqrt{\frac{\lambda}{U_\infty}}}}$$

Determinação dos pontos de estagnação:

$$u_r = u_\theta = 0, \quad r = R$$

De expressão de v_θ :

$$u_\theta = -U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{R^2} = 0 \rightarrow -U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{\frac{\lambda}{U_\infty}} = 0 \rightarrow 2 U_\infty \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\text{resulta } \underline{\underline{\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi}}$$

Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

Determinação das forças: a distribuição de pressões ao redor do cilindro é obtida da equação de Bernoulli:

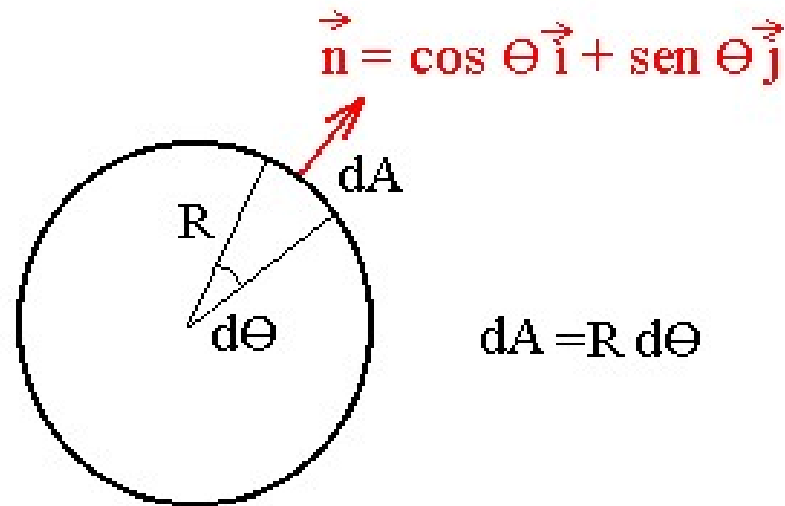
$$\frac{\rho U_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} = \frac{\rho v_{\theta}^2 (r = R)}{2} + p_{cil}$$

Resulta:

$$p_{cil} = p_{\infty} + \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} (1 - 4 \text{sen}^2 \theta)$$

Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

$$\frac{\vec{F}}{b} = - \int_A p \vec{n} dA \quad \text{Onde } b \text{ é a envergadura do cilindro.}$$



$$\frac{F_x}{b} = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \cos \theta R d\theta \quad ; \quad \frac{F_y}{b} = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \text{sen } \theta R d\theta$$

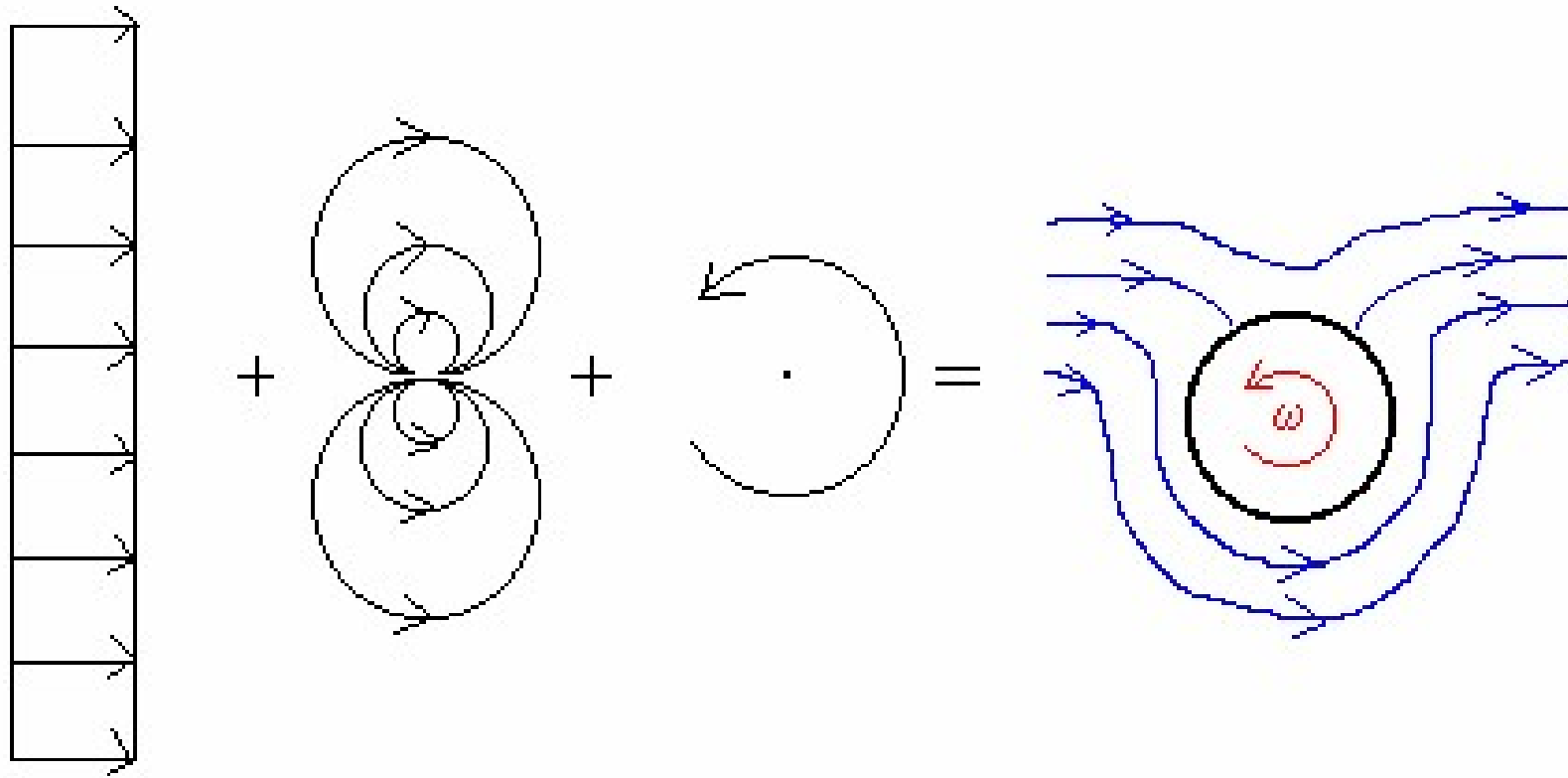
Exemplo de superposição de escoamentos elementares: escoamento ao redor de um cilindro

Resulta:

$$\frac{F_x}{b} = 0 \quad (\textit{Paradoxo de D' Alembert})$$

$$\frac{F_y}{b} = 0$$

Cilindro com Circulação



corrente

+

dipolo

+

vórtice

=

cilindro com rotação

Cilindro com Circulação

A função potencial resulta:

$$\phi = U_{\infty} x + \frac{\lambda \cos \theta}{r} + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} = U_{\infty} \underbrace{r \cos \theta}_x + \frac{\lambda \cos \theta}{r} + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

As velocidades resultam:

$$u_r = U_{\infty} \cos \theta - \frac{\lambda \cos \theta}{r^2}$$

$$u_{\theta} = -U_{\infty} \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Cilindro com Circulação

Determinação do raio R do cilindro:

$$u_r(r = R) = 0 \rightarrow \underline{\underline{R = \sqrt{\frac{\lambda}{U_\infty}}}}$$

Determinação dos pontos de estagnação:

$$u_r = u_\theta = 0, \quad r = R$$

De expressão de v_θ :

$$u_\theta = -U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{R^2} = 0 \rightarrow -U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{U_\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R}$$

$$\underline{\underline{\theta = \operatorname{arcsen} \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R}}}$$

Cilindro com Circulação

Determinação das forças: a distribuição de pressões ao redor do cilindro é obtida da equação de Bernoulli:

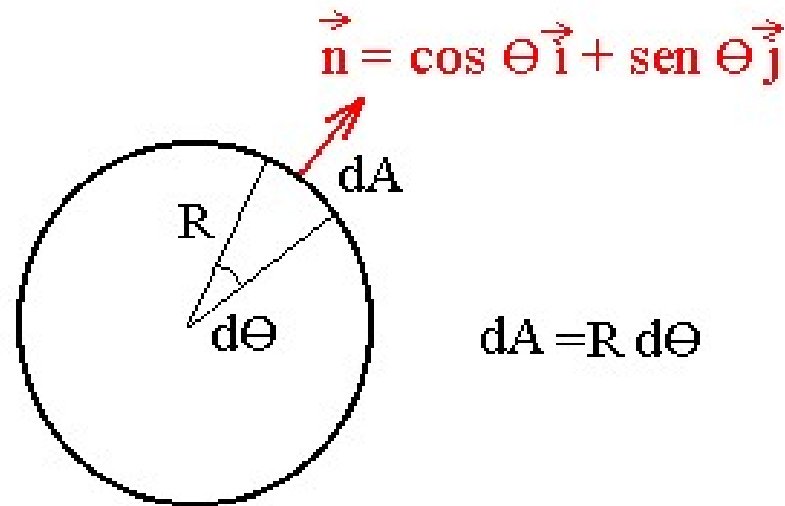
$$\frac{\rho U_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} = \frac{\rho v_{\theta}^2 (r = R)}{2} + p_{cil}$$

Resulta:

$$p_{cil} = p_{\infty} + \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \left(1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2\Gamma \operatorname{sen} \theta}{U_{\infty} \pi R} - \frac{\Gamma^2}{4U_{\infty}^2 \pi^2 R^2} \right)$$

Cilindro com Circulação

$$\frac{\vec{F}}{b} = - \int_A p \vec{n} dA \quad \text{Onde } b \text{ é a envergadura do cilindro.}$$



$$\frac{F_x}{b} = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \cos \theta R d\theta \quad ; \quad \frac{F_y}{b} = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \text{sen } \theta R d\theta$$

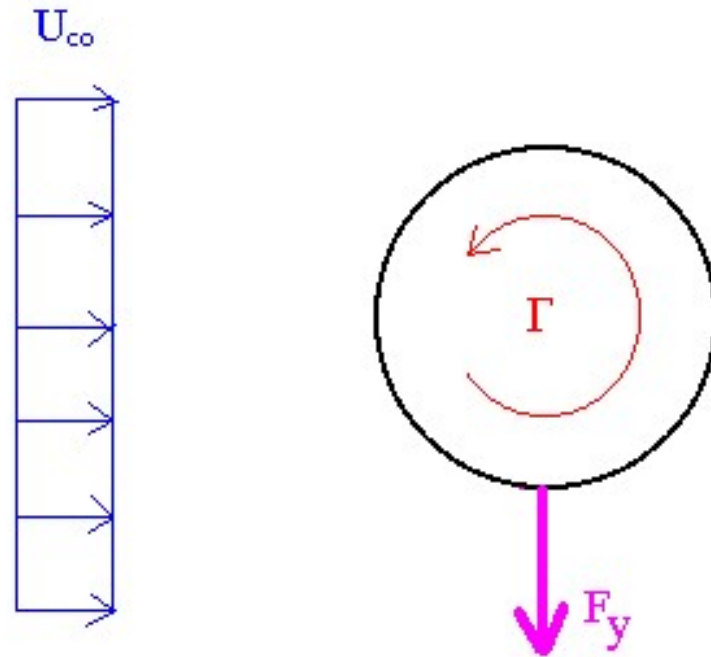
Cilindro com Circulação

Resulta:

$$\frac{F_x}{b} = 0 \quad (\text{Paradoxo de D'Alembert})$$

$$\frac{F_y}{b} = -\rho U_\infty \Gamma \quad (\text{Teorema de Kutta – Joukowski})$$

Cilindro com Circulação



Efeito Magnus

Bibliografia:

Assy, T.M., “Mecânica dos Fluidos”, Editora LTC, 2004.

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5ª edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Munson, B., “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos”, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.