ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 6 - Gabarito

1. Determine a área do chão do galpão de bioprocessos da fábrica de embalagens, cujos vértices são os pontos: $A = (4, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (-2, 2)$, $D = (-1, -3)$ e $E = (3, -2)$, utilizando vetores e produto escalar.

   Resolução:

   Supondo que as unidades de medida são em metros.

   A área de um triângulo formada por dois vetores u e v, considerando v o lado base do triângulo (vetor base do triângulo), pode ser calculada por $A = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right|$.
   (Essa fórmula é deduzida rápidamente do vetor projeção de u sobre $v^{\perp}$. Sugiro deduzir!)

   Assim, na figura formamos três triângulos que formam o desenho do chão.
   $\triangle CBA$, $\triangle CEA$ e $\triangle CDE$.

   Para o $\triangle CBA$, considere como vetor base o $v = CA = (6, -1)$, então $v^{\perp} = (1, 6)$ e $u = CB = (4, 2)$. A área do $\triangle CBA$ é

   $$A_1 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|4 + 12| = 8\, m^2.$$

   Para o $\triangle CEA$, considere como vetor base o mesmo $v = (6, -4)$ e $u = CE = (5, -4)$.
   A área do $\triangle CEA$ é

   $$A_2 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|5 - 24| = \frac{19}{2}\, m^2.$$

   Para o $\triangle CDE$, considere como vetor base o $v = CE = (5, -4)$, $v^{\perp} = (4, 5)$, e $u = CD = (1, -5)$.
   A área do $\triangle CDE$ é

   $$A_3 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|4 - 25| = \frac{21}{2}\, m^2.$$

   A área total é $A = 28\, m^2$.

2. Em uma indústria de panificação, busca-se fabricar pães já cortados para lanches naturais. O equipamento de corte de pães é controlado por um software, sabendo que esse apresentou um defeito no sistema, calcule a partir dos vetores da programação:
   $AB = u = (2, -1, -3)$ e $AC = v = (4, 2, 1)$: (A fatia do pão é $\triangle ABC$)

   (a) os comprimentos dos lados das fatias de pão;

   Resolução:

   Considerando que os lados da fatia são os vetores $u = AB$ e $v = AC$ e CB. Para obter os comprimentos, calculamos as normas desses vetores.

Para AB :
$\|u\|^2 = u \cdot u = (2,-1,-3) \cdot (2,-1,-3) = 4+1+9 = 14$;
$\|AB\| = \|u\| = \sqrt{14}$.
Para AC:
$\|v\|^2 = v \cdot v = (4,2,1) \cdot (4,2,1) = 16+4+1 = 21$;
$\|AC\| = \|v\| = \sqrt{21}$.
Para o terceiro lado $CB = -v + u = (-2,-3,-4)$. Calculamos a norma desse vetor:
$\|CB\|^2 = CB \cdot CB = 4+9+16 = 29$;
$\|CB\| = \sqrt{29}$.

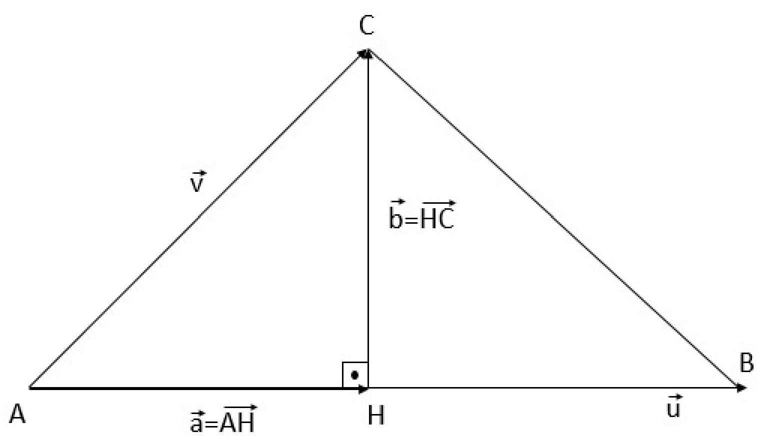
(b) o ângulo interno do vértice A.
Resolução:
Procuramos o ângulo entre os vetores u e v, denotando por θ. Utilizando a fórmula para o ângulo entre dois vetores, temos

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \, cos\, \theta$$

Portanto, calculando: $u \cdot v = (2,-1,-3) \cdot (4,2,1) = 8-2-3 = 3$.
As normas dos vetores v e u são: $\|v\| = \sqrt{21}$ e $\|u\| = \sqrt{14}$;
Sendo assim, obtemos a equação $3 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{21}.cos\, \theta$;
Portanto, $cos\, \theta = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$.
Basta dar essa resposta para referenciar o ângulo.
Apenas como informação do ângulo θ, fazemos: $\theta = arccos\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) \approx 79,92°$.

3. Ao simular uma fatia de pizza em uma malha tridimensional como exemplifica a Figura [1], temos os vetores $u = AB = (2,1,-1)$ e $v = AC = (3,-3,1)$, dados numa mesma base ortogonal $\beta = \{i,j,k\}$. Sabendo que $a = Proj_u v$, calcule:

Figura 1: Exemplo fatia de pizza



(a) Encontre o comprimento da altura $h_c = \|b\|$ do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao vértice C;
Resolução:

Observar que o vetor altura b une o ponto final de a com o ponto final de v, então é $b = v - a$. Então vamos encontrar o vetor a, que é o vetor projeção de v sobre u;

$$a = Proj_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{2}{6} u = \frac{1}{3}(2, 1, -1)$$

agora

$$b = v - a = (3, -3, 1) - \frac{1}{3}(2, 1, -1) = \frac{1}{3}(7, -10, 4).$$

O comprimento é a norma do vetor b:

$$h_c = \|b\| = \frac{1}{3}\sqrt{7^2 + (-10)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{165}}{3} = \sqrt{\frac{55}{3}}$$

(b) Encontre a área do triângulo $\triangle ABC$.

Resolução:

A área de $\triangle ABC$ é

$$\acute{A}rea = \frac{\|u\| . h_c}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{\frac{55}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{110}.$$

4. Deseja-se colocar uma porta com fechamento automático na entrada da linha de produção de uma indústria de achocolatados, dados os pontos $A = (1, 1)$ e $B = (10, 7)$ do eixo da porta aberta (A, B). Calcule o ponto Q onde se aplica força para abrir a porta, sabendo-se que a relação é de $(-2) : (-1)$.

   Resolução:

   Supondo que o ponto Q está no eixo, consideramos que ele particiona o eixo AB em dois segmentos, pois é dada uma relação de proporcionalidade: AQ e QB.

   Pela relação dada, consideramos que AQ é como (-2) enquanto QB é como (-1).

   Isso significa que AQ é o dobro de QB, isto é $AQ = \frac{(-2)}{(-1)} QB = 2(QB)$.

   Considerando como vetores que unem os pontos, temos:

   $Q - A = 2(B - Q)$, $Q = A + 2B - 2Q$, portanto $3Q = A + 2B$.

   Substituindo as coordenadas dos pontos:

$$Q = (7, 5).$$

5. Em uma linha de produção de balas temos duas esteiras retas (D e $\mathcal{L}$), sendo que uma leva balas azuis e a outra leva balas vermelhas. Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) da esteira $D : 5x - 12y + 15 = 0$ distam 3 unidades da esteira $\mathcal{L} :\ (3, 4) \cdot ((x, y) - (0, 3)) = 0$, determine $x_1 + x_2$.

   Resolução:

   A equação da esteira (azul no desenho) $\mathcal{L} :\ (3, 4) \cdot ((x, y) - (0, 3)) = 0$ é uma forma similar a equação geral dessa reta.

   Tirando informação dela temos um ponto de passagem $P = (0, 3)$ e um vetor ortogonal (normal) $n = u^{\perp} = (3, 4)$.

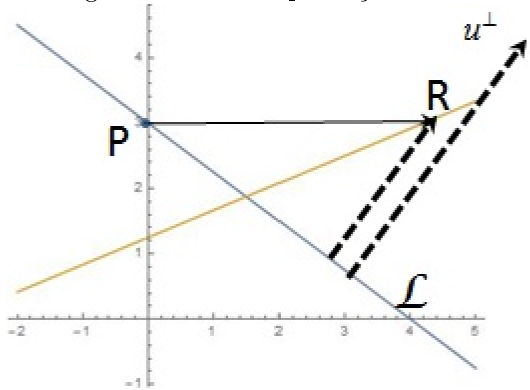
Supondo que R é o ponto na reta D, que dista 3 unidades da esteira $\mathcal{L}$, então R não é ponto de interseção entre as retas, e não pertence a reta $\mathcal{L}$.

Por outro lado, lembrar que se falamos de distância a reta $\mathcal{L}$ devemos considerar a menor distância que é dada trazando uma perpendicular a reta $\mathcal{L}$ desde o ponto R.
Portanto, o segmento que une o ponto R com a reta $\mathcal{L}$, é um vetor paralelo ao vetor $u^{\perp}$.

Desenhando de forma adequada vemos que é o vetor projeção ortogonal do vetor PR sobre $u^{\perp}$.

Como R pertence a esteira D, tem a forma $R = \left(r, \frac{5}{12}r + \frac{15}{12}\right)$, então $PR = \left(r, \frac{5}{12}r - \frac{21}{12}\right)$, vide Figura [2].

Figura 2: Linha de produção de balas



Calculando o vetor projeção:

$$Proj_{u^{\perp}} PR = \left(\frac{PR \cdot u^{\perp}}{\|u^{\perp}\|^2} \right) u^{\perp}$$

Calculando a norma do vetor projeção

$$\|Proj_{u^{\perp}} PR\| = \left\| \left(\frac{PR \cdot u^{\perp}}{\|u^{\perp}\|^2} \right) u^{\perp} \right\| = \left| \frac{PR \cdot u^{\perp}}{\|u^{\perp}\|^2} \right| \|u^{\perp}\| = \left| \frac{PR \cdot u^{\perp}}{\|u^{\perp}\|} \right|$$

Não dispense o valor absoluto, pois o produto escalar pode ser negativo.

Então, substituindo as coordenadas de PR:

$$\|Proj_{u^{\perp}} PR\| = \left| \frac{3r + \frac{5}{3}r - 7}{5} \right| = \left| \frac{14}{15}r - \frac{7}{5} \right|$$

Como $\|Proj_{u^\perp} PR\| = 3$, temos uma equação em valor absoluto:

$$\left|\frac{14}{15}r - \frac{7}{5}\right| = 3.$$

Assim temos duas soluções: $\frac{14}{15}r - \frac{7}{5} = 3$ e $\frac{14}{15}r - \frac{7}{5} = -3$.

Exatamente como era esperado, temos duas soluções, uma a cada lado da reta azul.

Da primeira equação obtemos $x_1 = \frac{33}{7}$ e da segunda $x_2 = -\frac{12}{7}$, logo $x_1 + x_2 = \frac{21}{7} = 3$.

6. **(Desafio)** Uma indústria de torrones decidiu utilizar um novo formato para seu produto a fim de diferenciá-lo de seus concorrentes, decidiu por um formato de trapézio como mostra a Figura [3]. Sabendo que $\|RQ\| = \|SP\|$, $S = (-4, 2)$, $Q = (10, 4)$, $PS \cdot PR = 0$ e $Proj_{QP} PR = (8, 8)$, encontre os pontos A, P, R e o vetor PR para poder dimensionar a embalagem do produto.

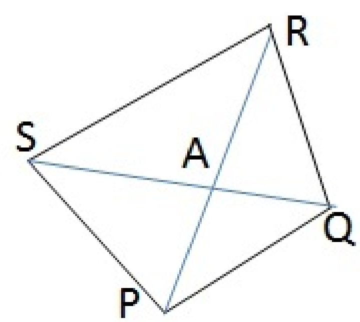


Figura 3: Novo formato de torrone

Observar (desde os dados):

1. Por ser trapezio SR é paralelo a QP.
2. Como $\|RQ\| = \|SP\|$ o trapezio é isósceles, assim $\|RP\| = \|SQ\|$.
3. Os vetores PS e PR são ortogonais ($PS \cdot PR = 0$).
4. Pelo dado da projeção sobre QP, então QP é paralelo ao vetor $(8, 8)$. Mais fácil: $QP \| (1, 1)$.

Resolução:

De 2., temos que os triângulos $\triangle RQS$ e $\triangle SPR$ são semelhantes (as medidas dos seus lados são iguais), logo os seus ângulos correspondentes são iguais. Então, o ângulo RQS deve ser igual ao ângulo SPR.

De 3., temos que o ângulo SPR é retângulo (PS e PR são ortogonais). Logo RQS é retângulo, o que significa que QR e QS são ortogonais, isto é, $QR \cdot QS = 0$.

Como S e Q são conhecidos fica uma expressão para conhecer sobre R:

$$(r_1 - 10, r_2 - 4) \cdot (-14, -2) = 0 \Rightarrow 7r_1 + r_2 = 74 \Rightarrow r_2 = 74 - 7r_1.$$

De 1. temos que $QP \| SR$, e de 4. temos $QP \| (1,1)$ então $SR \| (1,1)$.

Como S é conhecido expressamos

$$SR = (r_1 + 4, r_2 - 2) = \beta(1,1) \Rightarrow r_1 + 4 = \beta = r_2 - 2 \Rightarrow r_1 + 4 = r_2 - 2 \Rightarrow r_1 = r_2 - 6.$$

Temos duas equações para r_1 e r_2, resolvendo: $R = \left(\frac{17}{2}, \frac{29}{2}\right)$.

Agora vamos determinar P.

De 4. temos $QP \| (1,1)$ e como Q é conhecido, expressamos como: $(p_1 - 10, p_2 - 4) = \alpha(1,1)$. Daqui:

$$p_1 - 10 = p_2 - 4 \Rightarrow p_1 = 6 + p_2.$$

De 3. temos que $PS \cdot PR = 0$ e como R já foi determinado, e temos uma relação entre p_1 e p_2, substituimos:

$$(-4 - p_1, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{17}{2} - p_1, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0 \Rightarrow (-10 - p_2, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{5}{2} - p_2, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0$$

obtemos

$$2p_2^2 - 9p_2 + 4 = 0$$

resolvendo temos duas raízes do polinômio: $p_2 = 4$ e $p_2 = \frac{1}{2}$.

Observar que se $p_2 = 4$, então $\|SP\| = \sqrt{200} \neq \|RQ\|$. Descartado esse valor.

Considerando $p_2 = \frac{1}{2}$, determinamos $p_1 = \frac{13}{2}$, assim $P = \left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Daqui determinamos $PR = (2, 14)$.

Para determinar A utilizamos $SA \| SQ$, e expressamos como

$$SA = \gamma(SQ) \Rightarrow A = S + \gamma(SQ).$$

E como $PA \| PR$, utilizamos a expressão

$$PA = \delta(PR) \Rightarrow A = P + \delta(PR).$$

Temos um sistema de duas equações com duas incognitas, resolvendo $\delta = \frac{7}{32}$.

Substituindo $A = \left(\frac{111}{16}, \frac{57}{16}\right)$.

7. Em uma visão do alto da linha de produção pode-se observar os trajetos determinados para os colaboradores utilizarem. Determine as equações paramétricas das bissectriz dos trajetos:
$\mathcal{L}_1 :\ 4x - 3y = -10$ e $\mathcal{L}_2 :\ 7x + y - 20 = 0$,
que correspondem ao ângulo agudo e ao ângulo obtuso entre os trajetos$\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

   Resolução:

   Sabendo que as duas equações $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se interceptam, basta montar um sistema e resolver por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & -3 & -10 \\ 7 & 1 & 20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{2} \\ 7 & 1 & 20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & \frac{25}{4} & \frac{75}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Encontra-se o ponto de intersecção dos trajetos que é $(2, 6)$.

Para determinar o vetor de direção de uma bissetriz entre os vetores u e v dos dois trajetos, basta calcular os vetores unitários desses vetores e somar esses vetores unitários. O vetor soma resultante é o vetor de direção da reta bissetriz. Vide Figura [4] (a Figura é apenas ilustrativa para visualizar os ângulos entre duas retas).

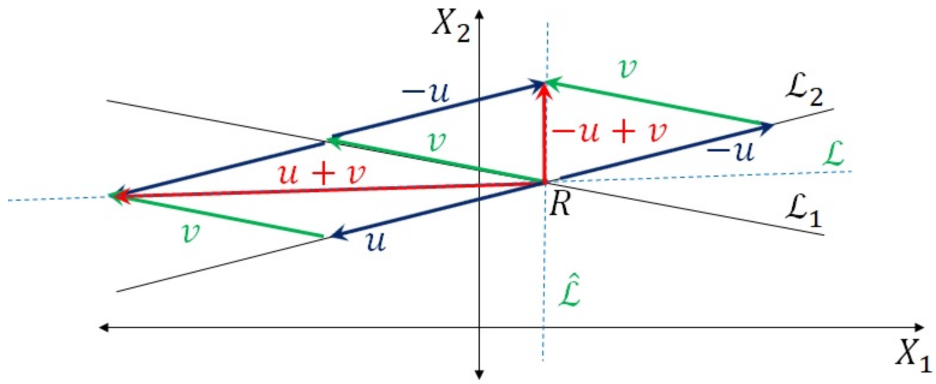


Figura 4: Trajetos da linha de produção

Para encontrar a bissetriz do ângulo agudo, considera-se $u = (3, 4)$ e $v = (1, -7)$, encontramos os vetores unitários $u_u = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $v_u = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$, a soma é $w = \left(\frac{6+\sqrt{2}}{10}, \frac{8-7\sqrt{2}}{10}\right)$, podemos tomar o vetor de direção $\bar{w} = \left(6 + \sqrt{2}, 8 - 7\sqrt{2}\right)$.

Assim, com esse vetor de direção e o ponto de passagem (que é o ponto de interseção dos dois trajetos) temos:

$$\begin{cases} x = 2 + (6 + \sqrt{2})t \\ y = 6 + (8 - 7\sqrt{2})t \end{cases} .$$

Para calcular a segunda bissetriz, considere o inverso de um vetor, por exemplo $-u$ e o v (sempre do mesmo tamanho, de preferência unitários).

O vetor de direção é $w_2 = -u_u + v_u$ e simplificando $\bar{w_2} = (-6 + \sqrt{2}, -8 - 7\sqrt{2})$ e com o ponto de passagem temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + (-6 + \sqrt{2})t \\ y = 6 + (-8 - 7\sqrt{2})t \end{cases} .$$

8. Uma fábrica de sorvetes produz picolés, possui duas esteiras que transportam os picolés para a embaladora, estas esteiras possuem as equações:
$\mathcal{L}_1 :\ (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, 1, 2)$ e $\mathcal{L}_2 :\ (x, y, z) = (-1, 3, 4) + r(-2, 3, 1)$.
Determine a equação vetorial da esteira da embaladora $\mathcal{L}$ que é ortogonal às retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, sendo que ela cruza as duas esteiras, como exemplifica a Figura 5 e também os pontos de intersecção.

   Resolução:

   Se $\mathcal{L}$ é ortogonal a $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, o vetor de direção de $\mathcal{L}$ será ortogonal aos vetores de direção das outras duas retas simultaneamente.

Um vetor de direção será o produto vetorial

$$w = (1, 1, 2) \times (-2, 3, 1) = (-5, -5, 5) = -5(1, 1, -1).$$

A equação da reta $\mathcal{L}$ precisa de um ponto de passagem.

Como $\mathcal{L}$ intersepta $\mathcal{L}_1$, vamos a utilizar esse ponto $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$, como ponto de passagem, então a equação da reta $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L} : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + s(1, 1, -1).$$

Por ser (x_1, y_1, z_1) ponto de $\mathcal{L}_1$ podemos escrever

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, -1) + t_1(1, 1, 2) = (1 + t_1, t_1, -1 + 2t_1).$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}$ cruza $\mathcal{L}_2$, existe um ponto em $\mathcal{L}_2$ que também é ponto de $\mathcal{L}$.

Esse ponto satisfaz:

$$(x_2, y_2, z_2) = (-1, 3, 4) + r_2(-2, 3, 1) = (-1 - 2r_2, 3 + 3r_2, 4 + r_2).$$

Por ser ponto de $\mathcal{L}$, substituimos (x_2, y_2, z_2) na equação de $\mathcal{L}$ obtendo:

$$\mathcal{L} : (1 + t_1 + s, t_1 + s, -1 + 2t_1 - s) = (-1 - 2r_2, 3 + 3r_2, 4 + r_2).$$

O que dá um sistema linear de 3 equações com 3 incognitas.

Levando a matriz estendida, temos:

$$\begin{cases} 2r_2 + t_1 + s = -2 \\ -3r_2 + t_1 + s = 3 \\ -r_2 + 2t_1 - s = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}.$$

A solução é $r_2 = -1$, $t_1 = \frac{4}{3}$ e $s = -\frac{4}{3}$. Assim:

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$$

e

$$(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 3) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}.$$

A equação vetorial da reta$\mathcal{L}$ é $\mathcal{L} : (x, y, z) = (1, 0, 3) + s(1, 1, -1)$.

Figura 5: Máquina empacotadora de picolés

9. Em uma indústria de embalagens, no plano $\mathcal{P}$ encontra-se a linha de produção de embalagens cartonadas $\mathcal{L}_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

   O plano $\mathcal{P}$ é paralelo com a linha de embalagens laminadas $\mathcal{L}_2 : \begin{cases} 2x = y + 7 \\ 3x = z \end{cases}$.

   Determine a equação vetorial, equação geral e equações paramétricas do plano $\mathcal{P}$.

   Resolução:

   Na primeira linha de produção, fazemos

$$\mathcal{L}_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2} = t$$

   assim obtemos facilmente uma representação paramétrica:

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

   Como a linha de produção está contida no plano, o vetor de direção de $\mathcal{L}_1$ pode ser considerado como um dos vetores de direção do plano.

   Outro vetor de direção pegamos da segunda linha de produção, pois é paralela ao plano:

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 2s - 7 \\ z = 3s \end{cases} .$$

   Assim, os dois vetores direção são $u = (1, -1, 2)$ e $v = (1, 2, 3)$.

Para a equação vetorial falta um ponto de passagem que pode ser obtido da reta $\mathcal{L}_1$ pois está contida no plano.

Por exemplo $P = (0, 3, -1)$ quando $t = -1$.

A equação vetorial do plano é $\mathcal{P} : (x, y, z) = (0, 3, -1) + m(1, -1, 2) + r(1, 2, 3)$.

As equações paramétricas

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = m + r \\ y = 3 - m + 2r \\ z = -1 + 2m + 3r \end{cases} .$$

Para a equação geral obtemos o vetor normal

$$n = u \times v = (-7, -1, 3)$$

portanto a equação geral é $\mathcal{P} : -7x - y + 3z = -6$.

10. Em indústrias de diversos ramos de produtos utilizam-se esteiras transportadoras, como mostra a Figura [6]. Como engenheiro de alimentos, verifique se a esteira de transporte foi montada com o ângulo correto através do ponto $S = (1, 2, 2)$ de recebimento de matéria-prima na esteira e o plano $\mathcal{P} :\ 2x + y + z = 3$ da esteira, indicando se o ponto está acima do plano e escreva as equações paramétricas e vetorial do plano.

Figura 6: Esteira transportadora

Resolução:

Para verificar se a esteira foi montada no local correto de recebimento basta substituir os valores dos pontos na equação do plano da esteira, resultando em $2(1) + (2) + (2) = 6 > 3$.

Assim, pode-se observar que o ponto está acima do plano e a esteira foi montada corretamente, se esse foi o objetivo.

Observar que o número 6 não indica a distância do ponto ao plano, apenas que está na região de pontos que satisfazem a desigualdade maior.

Sugiro calcular a distância do ponto S ao plano $\mathcal{P}$.

Para obter a equação vetorial do plano, podemos determinar três pontos do plano e montamos dois vetores de direção. Mas esses vetores não devem ser paralelos, isto é, os pontos não devem ser colineares. Assim, a escolha pode ser ruim e fazer um trabalho desnecessário.

Então, sugiro utilizar outro método mais efetivosos, calculamos dois pontos para parâmetros diferentes, por exemplo $A = (0, 0, 3)$ e $B = (0, 1, 2)$. Formamos um vetor não nulo $v = AB = B - A = (0, 1, -1)$.

Agora aproveitamos que conhecemos o vetor normal desde a equação do plano: $n = (2, 1, 1)$. Então, se realizamos o produto vetorial do vetor calculado v com o vetor n, teremos um terceiro vetor ortogonal aos dois. Mas, por ser ortogonal a n o vetor produto vetorial estará no plano, pois o vetor normal é ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ todo.

Assim, calculamos $v \times n = (2, -2, -2) = 2(1, -1, -1)$, e fazemos $u = (1, -1, -1)$. Já podemos montar as equações solicitadas.

A equação vetorial:

$$\mathscr{P} : P = (0, 0, 3) + t(0, 1, -1) + s(1, -1, -1) \text{ onde } s, t \in \mathbb{R}.$$

As equações paramétricas

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = s \\ y = t - s \\ z = 3 - t - s \end{cases} .$$