

Aula 10. Cadeias de Markov com tempo contínuo II.

1. Escrever as equações de Kolmogorov backward e forward para o processo de Poisson homogêneo com taxa λ , e tenta resolver. Escrever as equações de Kolmogorov backward e forward para o processo de nascimento puro com taxa λ_n (nem tenta resolver).

Solução. Primeiramente lembramos que o processo de Poisson é um processo de Markov com tempo contínuo, e ainda mais, ele pertence a classe de processos de Markov que chamamos de processos de nascimento e morte. A matriz $Q = (q_{i,j}, i \neq j)$ de taxas de transição descreve totalmente (define) a cadeia com tempo contínuo. Vamos escrever essas taxas para o processo de Poisson. Observa que os “pulos” permitidos (aqueles que têm a taxa positiva) para processo de Poisson, são somente os pulos $i \rightarrow i + 1$, para quaisquer $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Assim,

$$q_{i,i+1} = \lambda, \text{ para quaisquer } i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

A taxa de permanência no estado i qualquer é a mesma

$$v_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j} = q_{i,i+1} = \lambda.$$

Agora estamos prontos para escrever as equações de Kolmogorov. Seja $X(t)$ uma cadeia formada pela matriz de transição $Q = (q_{i,j}, i \neq j)$. Seja $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(0) = i)$, então

$$\begin{aligned} \text{equações forward } P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ \text{equações backward } P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \end{aligned}$$

Descrevemos forward:

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= P_{i,j-1}(t) q_{j-1,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= P_{i,j-1}(t) \lambda - \lambda P_{i,j}(t) = \lambda (P_{i,j-1}(t) - P_{i,j}(t)), \quad j > i, \\ P'_{i,i}(t) &= -\lambda P_{i,i}(t), \quad j = i. \end{aligned}$$

Descrevemos backward:

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= q_{i,i+1} P_{i+1,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= \lambda P_{i+1,j}(t) - \lambda P_{i,j}(t) = \lambda (P_{i+1,j}(t) - P_{i,j}(t)), \quad j > i, \\ P'_{i,i}(t) &= -\lambda P_{i,i}(t), \quad j = i. \end{aligned}$$

Processo de Poisson é processo homogêneo, o que significa, por exemplo,

$$P_{i,j-1}(t) = P_{i+1,j}(t),$$

e em sua vez, podemos observar que as equações *forward* e *backward* são equivalentes. A solução para $P_{i,i}(t)$ é direto, e fizemos durante o curso várias vezes $P_{i,i}(t) = e^{-\lambda t}$. O que coincide com a nossa intuição: a distribuição de tempo de pulo (uma ocorrência de um evento) tem a distribuição exponencial com a taxa λ , o que de outro lado, interpreta-se como tempo de permanência em estado. Seja T_i esse tempo de permanência em estado i , e sabemos que $T_i \sim \exp(\lambda)$, então

$$P_{i,i}(t) = \mathbb{P}(X(t) = i \mid X(0) = i) = \mathbb{P}(T_i > t) = e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Tentamos resolver a equação para $P_{i,i+1}(t)$:

$$\begin{aligned} P'_{i,i+1}(t) &= \lambda (P_{i+1,i+1}(t) - P_{i,i+1}(t)), \text{ equação backward,} \\ P'_{i,i+1}(t) &= \lambda (P_{i,i}(t) - P_{i,i+1}(t)), \text{ equação forward,} \end{aligned}$$

Lembrando (1) ambos as equações tornam uma equação

$$P'_{i,i+1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_{i,i+1}(t). \quad (2)$$

Mostrei como resolver isso na aula, mas isso não é uma habilidade que vai ser cobrada na prova, por isso, aqui, sugiro verificar que a função $\lambda t e^{-\lambda t}$ satisfaz equação (2).

Queria somente mostrar uma versão alternativa de provar que $P_{i,i+1}(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$: sejam T_i, T_{i+1} são tempos de permanência em estados correspondentes, então

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(t) &= \mathbb{P}(X(t) = i+1 \mid X(0) = i) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{P}(T_{i+1} > t-s) ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t 1 ds = \lambda t e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora o processo de nascimento puro com taxas $(\lambda_i, i = 0, 1, \dots)$. Em termos de taxas de transição $q_{i,i+1} = \lambda_i$ e as equações de Kolmogorov são

Descrevemos forward:

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= P_{i,j-1}(t) q_{j-1,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= P_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} - \lambda_j P_{i,j}(t), \quad j > i, \\ P'_{i,i}(t) &= -\lambda_i P_{i,i}(t), \quad j = i. \end{aligned}$$

Descrevemos backward:

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= q_{i,i+1} P_{i+1,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= \lambda_i P_{i+1,j}(t) - \lambda_i P_{i,j}(t), \quad j > i, \\ P'_{i,i}(t) &= -\lambda_i P_{i,i}(t), \quad j = i. \end{aligned}$$

Nesta vez, as equações são diferentes e não são equivalentes.

2. Considera o processo de nascimento e morte em versão quando não há nascimentos, i.e. $\lambda_n = 0$ para qualquer n .

- Escreve equação dianteiro (*forward*) de Kolmogorov.
- Achar a solução para $P_{n,n}(t)$.
- Encontre $P_{n,n-1}(t)$.
- Mostre que, se $\mu_n = n\mu$, em que μ é um parâmetro fixo, então

$$P_{x,y}(t) = \binom{x}{y} (e^{-\mu t})^y (1 - e^{-\mu t})^{x-y}, \quad 0 \leq y \leq x.$$

Solução. A situação parecida co item anterior, em termos de taxas de transição somente seguintes taxas são positivas

$$q_{i,i-1} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

as equações de Kolmogorov são seguintes.

Descrevemos forward: para $j < i$

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= P_{i,j+1}(t) q_{j+1,j} - v_j P_{i,j}(t) \\ P'_{i,j}(t) &= P_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} - \mu_j P_{i,j}(t), \quad j < i, \\ P'_{i,i}(t) &= -\mu_i P_{i,i}(t), \quad j = i. \end{aligned}$$

Descrivemos backward:

$$\begin{aligned}
 P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\
 P'_{i,j}(t) &= q_{i,i-1} P_{i-1,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\
 P'_{i,j}(t) &= \mu_i P_{i-1,j}(t) - \mu_i P_{i,j}(t), \quad j < i, \\
 P'_{i,i}(t) &= -\mu_i P_{i,i}(t), \quad j = i.
 \end{aligned}$$

3. Considere processo com três estados $S = \{0, 1, 2\}$ e com seguintes taxas de transição: $q_{0,1} = q_{1,2} = q_{2,0} = \lambda$ e $q_{1,0} = q_{2,1} = q_{0,2} = \mu$. Escreva equações de Kolmogorov dianteiro (*forward*) e retrógrado (?) (*backward*). Tenta achar $p_{0,x}(t)$, $x \in S$. Achar a distribuição invariante.

Solução. Descrivemos *forward*: só para $i = 0$ e $j = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
 P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - v_j P_{i,j}(t) \\
 P'_{0,0}(t) &= P_{0,1}(t) q_{1,0} + P_{0,2}(t) q_{2,0} - v_0 P_{0,0}(t) \\
 &= P_{0,1}(t) \mu + P_{0,2}(t) \lambda - (\lambda + \mu) P_{0,0}(t) \\
 P'_{0,1}(t) &= P_{0,0}(t) q_{0,1} + P_{0,2}(t) q_{2,1} - v_1 P_{0,1}(t) \\
 &= P_{0,0}(t) \lambda + P_{0,2}(t) \mu - (\lambda + \mu) P_{0,1}(t) \\
 P'_{0,2}(t) &= P_{0,0}(t) q_{0,2} + P_{0,1}(t) q_{1,2} - v_2 P_{0,2}(t) \\
 &= P_{0,0}(t) \mu + P_{0,1}(t) \lambda - (\lambda + \mu) P_{0,2}(t)
 \end{aligned}$$

Descrivemos *backward*: só para $i = 0$ e $j = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
 P'_{i,j}(t) &= \sum_{k \neq j} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \\
 P'_{0,0}(t) &= q_{0,1} P_{1,0}(t) + q_{0,2} P_{2,0}(t) - v_0 P_{0,0}(t) \\
 &= \lambda P_{1,0}(t) + \mu P_{2,0}(t) - (\lambda + \mu) P_{0,0}(t) \\
 P'_{0,1}(t) &= q_{0,1} P_{1,1}(t) + q_{0,2} P_{2,1}(t) q_{2,1} - v_0 P_{0,1}(t) \\
 &= P_{0,0}(t) \lambda + P_{0,2}(t) \mu - (\lambda + \mu) P_{0,1}(t) \\
 P'_{0,2}(t) &= q_{0,1} P_{1,2}(t) + q_{0,2} P_{2,2}(t) - v_0 P_{0,2}(t) \\
 &= \lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{0,1}(t) - (\lambda + \mu) P_{0,2}(t)
 \end{aligned}$$

Nem vamos tentar achar $p_{0,x}(t)$, $x \in S, \dots$

Sobre a distribuição invariante: já que a distribuição invariante, então não mudar durante o tempo, por isso a derivada é zero. Aplicamos isso para equações forward substituindo $P_{i,j}(t)$ pela invariante $\pi(j)$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 0 = \pi(1)\mu + \pi(2)\lambda - (\lambda + \mu)\pi(0) \\ 0 = \pi(0)\lambda + \pi(2)\mu - (\lambda + \mu)\pi(1) \\ 0 = \pi(0)\mu + \pi(1)\lambda - (\lambda + \mu)\pi(2) \\ 1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) \text{ adicionamos isso} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu)(1 - \pi(1) - \pi(2)) = \pi(1)\mu + \pi(2)\lambda \\ (\lambda + \mu)(1 - \pi(0) - \pi(2)) = \pi(0)\lambda + \pi(2)\mu \\ (\lambda + \mu)(1 - \pi(0) - \pi(1)) = \pi(0)\mu + \pi(1)\lambda \\ 1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu)(1 - \pi(1) - \pi(2)) = \pi(1)\mu + \pi(2)\lambda \\ (\lambda + \mu)(1 - \pi(0) - \pi(2)) = \pi(0)\lambda + \pi(2)\mu \\ (\lambda + \mu)(1 - \pi(0) - \pi(1)) = \pi(0)\mu + \pi(1)\lambda \\ 1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu) = \pi(1)(2\mu + \lambda) + \pi(2)(2\lambda + \mu) \\ (\lambda + \mu) = \pi(0)(2\lambda + \mu) + \pi(2)(2\mu + \lambda) \\ (\lambda + \mu) = \pi(0)(2\mu + \lambda) + \pi(1)(2\lambda + \mu) \\ 1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

... bom, tentam resolver, a resposta é simples

$$\pi(0) = \pi(1) = \pi(2) = \frac{1}{3}.$$