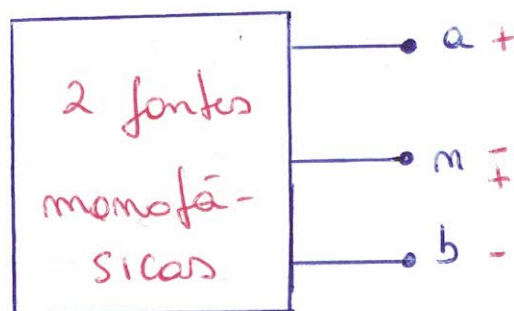


Circuitos trifásicos

- Sistemas monofásicos a três fios
- Conexões 3φ Y-Y (estrela-estrela)
- Conexões em triângulo (Δ)
- medição de potência em sistemas 3φ
- Transformações Y- Δ ou Δ -Y no lado das cargas

1) Sistemas monofásicos a três fios



+
 V_{ab}
-

$$V_{ab} - V_{mb} - V_{am} = 0$$

$$V_{ab} = V_{am} + V_{mb}$$

$$V_{ab} = 2V_s$$

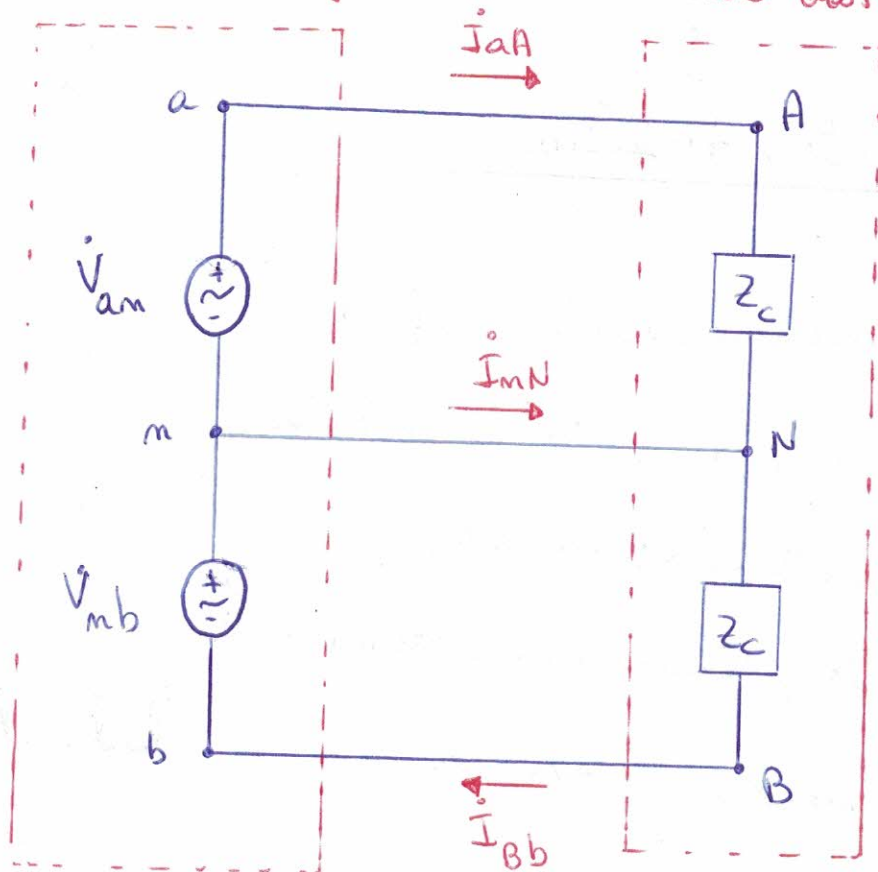
$$V_{am} = V_{mb} = V_s$$

⏟

$$V_{ab} = 2V_{am} = 2V_{mb} = 2V_s$$

Lado das "fontes"

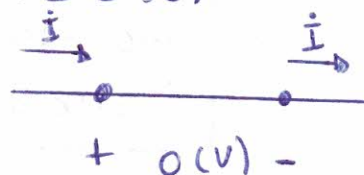
Lado das "CARGAS"



Exemplo 01

* Conectar cargas operando em qualquer uma das tensões: V_{an} , V_{mb} ou V_{ab}

* Fios que conectam as fontes às cargas são condutores perfeitos ($R = 0 \Omega$)



$$V_{an} = V_{mb}$$

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_c} = I_{Bb} = \frac{V_{mb}}{Z_c}$$

* LKC ao nó N:

$$-\dot{I}_{mN} - \dot{I}_{aA} + \dot{I}_{Bb} = 0$$

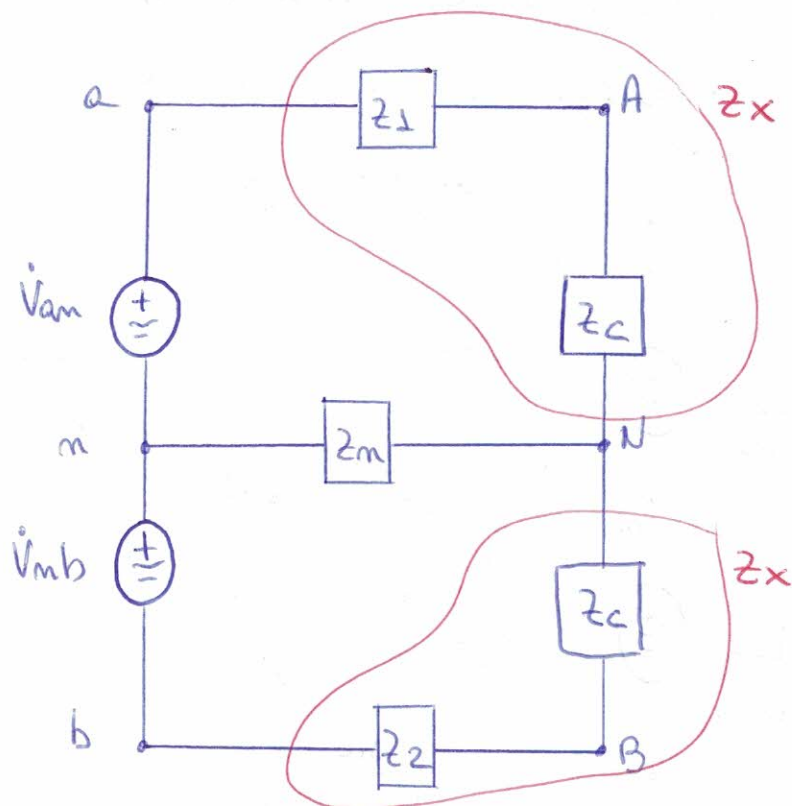
$$\dot{I}_{mN} = \dot{I}_{Bb} - \dot{I}_{aA}$$

$$\dot{I}_{mN} = 0$$

CONCLUSÃO: O condutor neutro poderia ser "removido" sem que qualquer corrente ou tensão fosse alterada no sistema.

* Resultados obtido em função da igualdade (simetria) entre as duas fontes e entre as duas cargas!

Exemplo 02



$$\dot{I}_{mN} = ? \quad z_1 = z_2 \text{ e } z_m \neq z_m$$

$z_x = z_c + z_s \rightarrow$ cargas IDÊNTICAS $\rightarrow$ sistema BALAN-
CEADO

$$\dot{I}_{mN} = 0 \text{ (ZERO)}$$

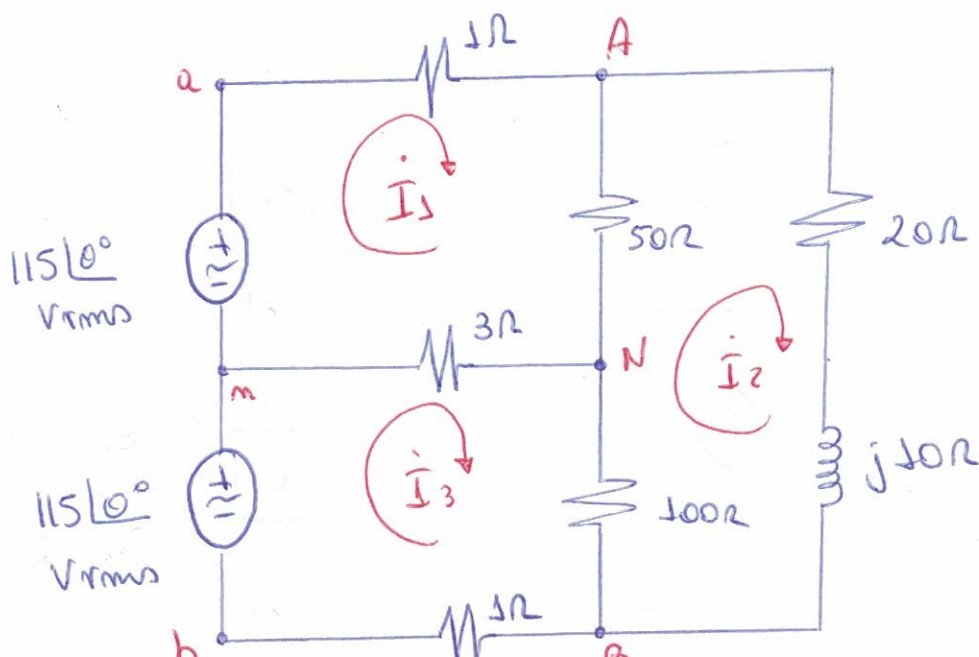
Provar

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \therefore -\dot{V}_1 + z_x \dot{I}_1 + z_m (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0$$

$$-\dot{V}_1 + z_x \dot{I}_2 + z_m (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0$$

Exemplo 03:

Análise o sistema e determine a potência ^{média} forneci-
da a cada uma das três cargas, bem como a po-
tência perdida (dissipada) no condutor neutro e
nas duas linhas de conexão.



* LKT in 3 malhas

$$-115 \angle 0^\circ + \dot{I}_1 + 50 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 3 (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = 0$$

$$(20 + j10) \dot{I}_2 + 100 (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) + 50 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0$$

$$-115 \angle 0^\circ + 3 (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + 100 (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) + \dot{I}_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 54 & -50 & -3 \\ -50 & 170 + j10 & -100 \\ -3 & -100 & 104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 \angle 0^\circ \\ 0 \\ 115 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_1 = 11,24 \angle -19,83^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_2 = 9,389 \angle -24,47^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_3 = 10,37 \angle -21,80^\circ \text{ Arms}$$

* Correntes nas duas linhas de conexão e no neutro

$$\dot{I}_{aA} = \dot{I}_1 = 11,24 \angle -19,83^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_{bB} = -\dot{I}_3 = 10,37 \angle 158,20^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 = 0,9459 \angle -177,77^\circ \text{ Arms}$$

Potência média } drenada (entregue) para a carga
ativa
útil } CARGA RESISTIVA!!!

$$P_{50\Omega} = 50 \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2|^2 = 206 \text{ W}$$

$$P_{100\Omega} = 100 \cdot |\dot{I}_3 - \dot{I}_2|^2 = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = 20 \cdot |\dot{I}_2|^2 = 1763 \text{ W}$$

↳ média, útil ou ativa!!!

$$P_{\text{TOTAL}} = 206 + 117 + 1763$$

$$P_{\text{TOTAL}} = 2086 \text{ W}$$

Potência média dissipada (perda) nos condutores de conexão e no neutro:

$$P_{aA} = 1 \cdot |\dot{I}_1|^2 = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = 1 \cdot |\dot{I}_3|^2 = 108 \text{ W}$$

$$P_{mN} = 3 \cdot |\dot{I}_{mN}|^2 = 3 \text{ W}$$

$$P_{\text{TOTAL}} = 237 \text{ W}$$

Potência total absorvida:

$$P_{\text{GERAL}} = 2086 + 237$$

$$P_{\text{GERAL}} = 2323 \text{ W}$$

Potência total fornecida

$$P_{\text{am}} = 115 \cdot 11,24 \cdot \cos 19,83^\circ = 1216 \text{ W}$$

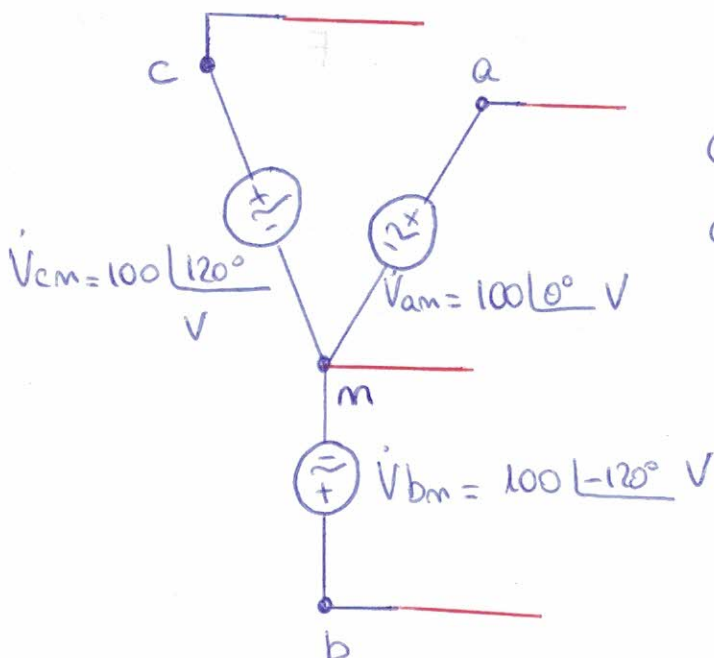
$$P_{\text{bm}} = 115 \cdot 10,37 \cdot \cos 21,80^\circ = 1107 \text{ W}$$

$$P_{\text{FORNECIDA}} = 2323 \text{ W}$$

Fonte de tensão trifásica

- configuração Y a 3 ou 4 fios

- " Δ a 3 fios

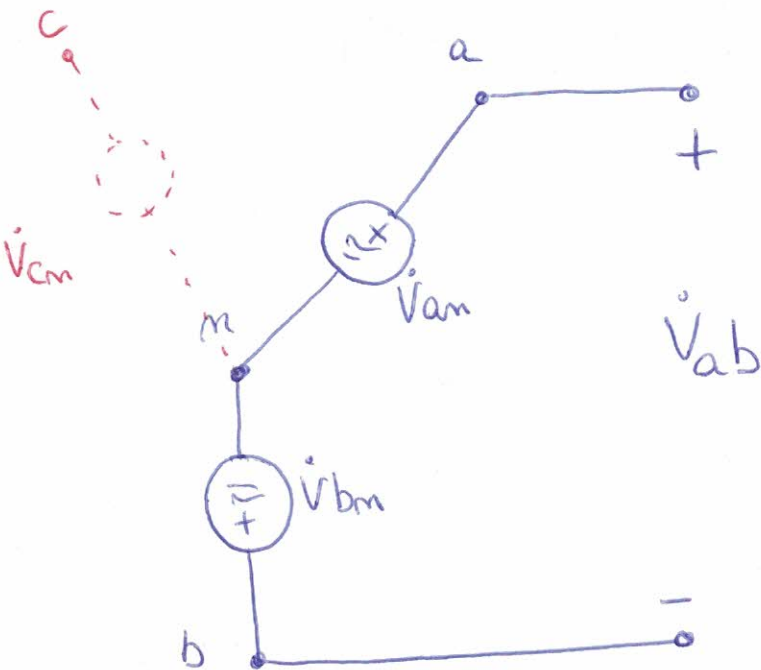


CONFIGURAÇÃO Y a 3 fios ou
CONFIGURAÇÃO Y a 4 fios

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{\text{am}} &= 100 \angle 0^\circ (\text{V}) \\ \dot{V}_{\text{bm}} &= 100 \angle -120^\circ (\text{V}) \\ \dot{V}_{\text{cm}} &= 100 \angle -240^\circ (\text{V}) \\ &\text{ou} \\ \dot{V}_{\text{cm}} &= 100 \angle 120^\circ (\text{V}) \end{aligned} \right\}$$

TENSOES DE FASE !!!

$\dot{V}_{ab} = ? \Rightarrow$ TENSÃO DE LINHA!!!



* LKT

$$-\dot{V}_{ab} + \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bm} = 0$$

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bm}$$

$$\dot{V}_{ab} = 100 \angle 0^\circ - 100 \angle -120^\circ$$

$$\dot{V}_{ab} = 100 - (-50 - j86,8)$$

$$\dot{V}_{ab} = 173,2 \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{ab} = \sqrt{3} \cdot 100 \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{ab} = \sqrt{3} \cdot V_P \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{ab} = \sqrt{3} \cdot 100 \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{bc} = \sqrt{3} \cdot 100 \angle 30^\circ - 120^\circ = \sqrt{3} \cdot 100 \angle -90^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{ca} = \sqrt{3} \cdot 100 \angle 30^\circ - 240^\circ = \sqrt{3} \cdot 100 \angle -210^\circ \text{ (V)}$$

$$|\dot{V}_{am}| = |\dot{V}_{bm}| = |\dot{V}_{cm}|$$

e

$$\dot{V}_{am} + \dot{V}_{bm} + \dot{V}_{cm} = 0$$

$$V_F \angle 0^\circ + V_F \angle -120^\circ + V_F \angle -240^\circ = 0$$

* Tensões entre um terminal de linha (uma fase) e o neutro $\Rightarrow$ tensões de fase!!!

Tensões de fase

$$\dot{V}_{am} = V_F \angle 0^\circ (V)$$

$$\dot{V}_{bm} = V_F \angle -120^\circ (V)$$

$$\dot{V}_{cm} = V_F \angle -240^\circ (V)$$

ou

$$\dot{V}_{cm} = V_F \angle 120^\circ (V)$$

Sequência de fases POSITIVA
ou

Sequência de fases abc

("fases em sentido anti-horário")

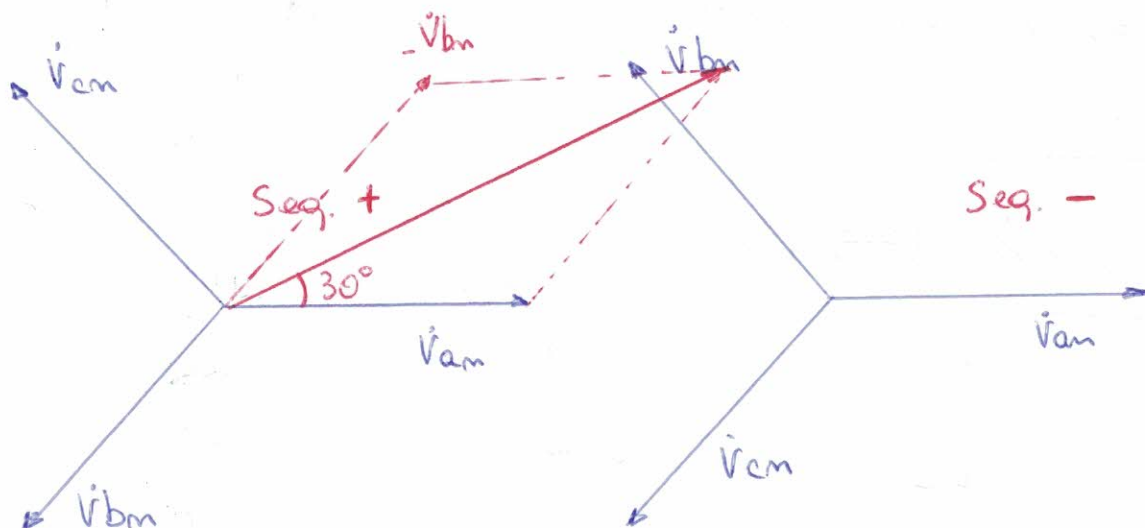
$$\dot{V}_{am} = V_F \angle 0^\circ (V)$$

$$\dot{V}_{bm} = V_F \angle 120^\circ (V)$$

$$\dot{V}_{cm} = V_F \angle -120^\circ (V)$$

Sequência de fases NEGATIVA
ou

Sequência de fases cba



$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{am} - \dot{V}_{bm} = \sqrt{3} V_F \angle 30^\circ (V)$$

Tensões de linha

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bn} = \sqrt{3} V_F \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_{bc} = \sqrt{3} V_F \angle -90^\circ \text{ (V)}$$

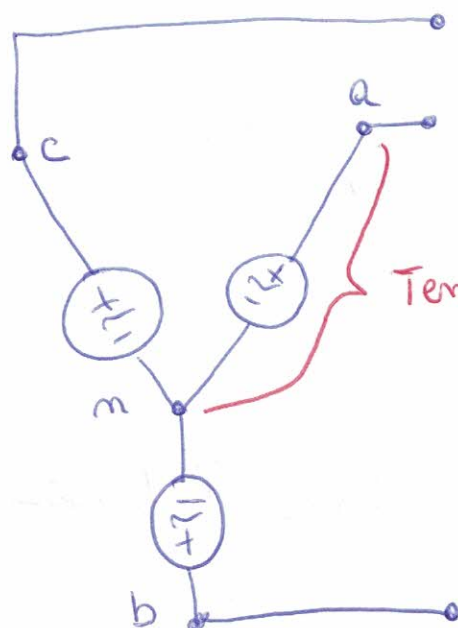
$$\dot{V}_{ca} = \sqrt{3} V_F \angle -210^\circ \text{ (V)}$$

$$V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

$V_L \Rightarrow$ tensão de linha

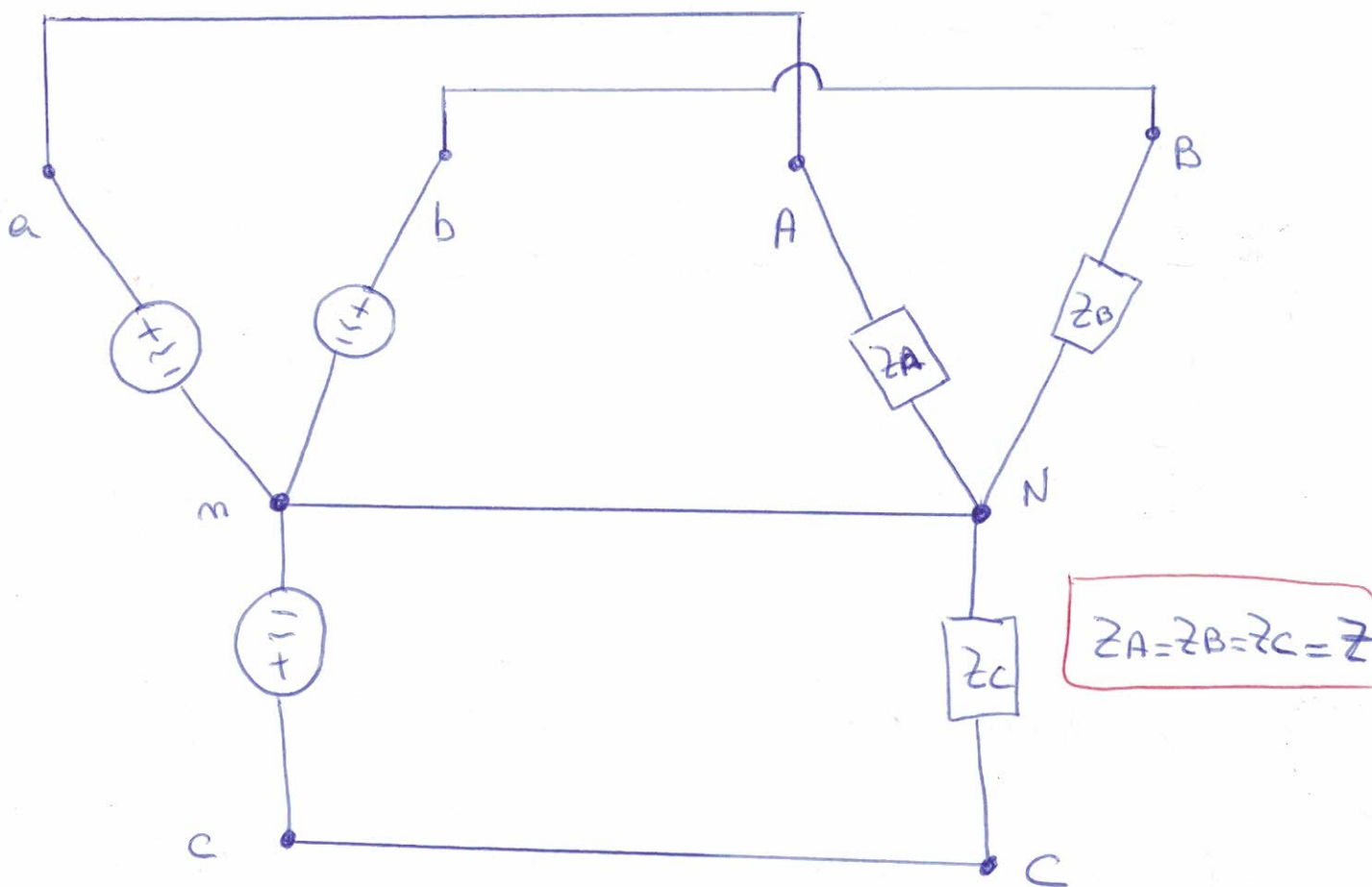
$V_F \Rightarrow$ tensão de fase

$V_L = \sqrt{3} V_F \Rightarrow$ para uma fonte 3 ϕ conectada em Y



Exemplo: Conexão de uma carga balanceada 3 ϕ em Y a uma conexão de fontes também em Y

Conexão: Y-Y (estrela-estrela) com neutro



$$Z_A = Z_B = Z_C = Z$$

Y-Y com neutro

* Três circuitos monofásicos que possuem um terminal compartilhado!!!

$$\dot{I}_{aA} = \frac{\dot{V}_{am}}{Z} \quad (\text{Arms})$$

$$\dot{I}_{bB} = \frac{\dot{V}_{bm}}{Z} = \frac{\dot{V}_{am} \cdot \angle -120^\circ}{Z} = \dot{I}_{aA} \cdot \angle -120^\circ \quad (\text{Arms})$$

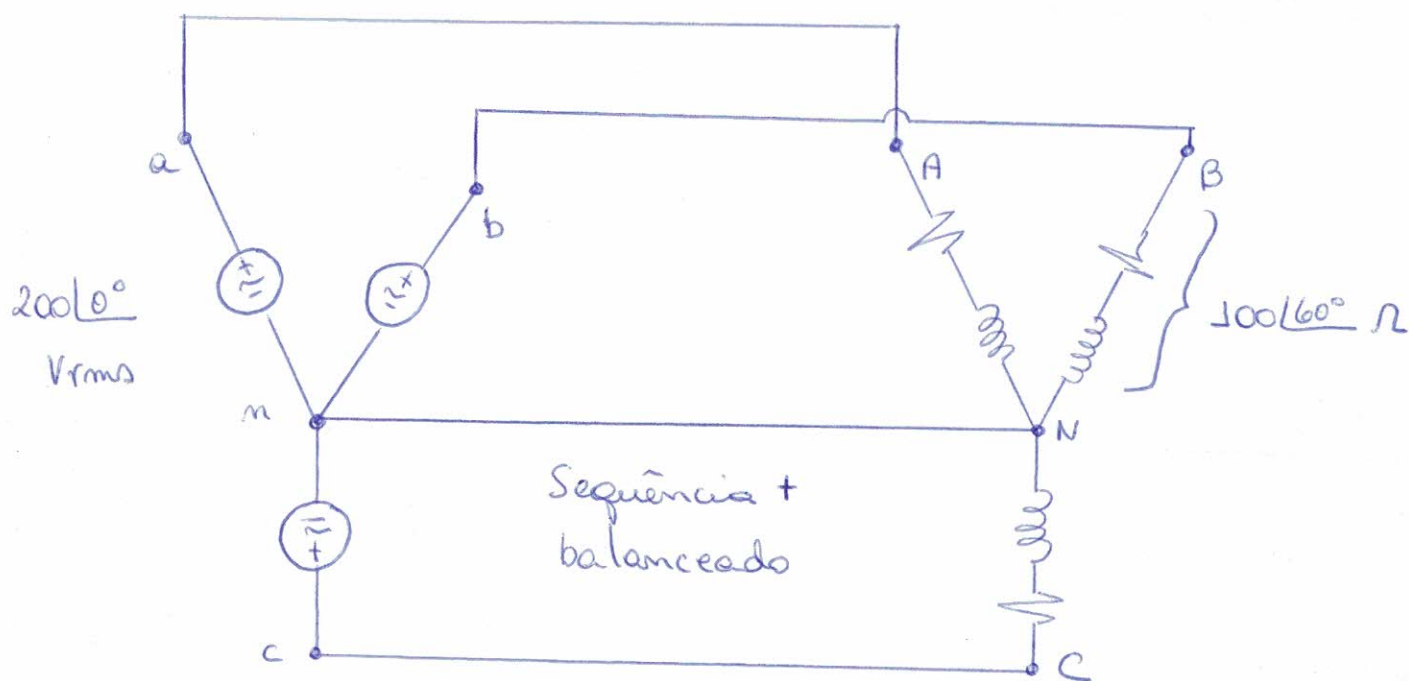
$$\dot{I}_{cC} = \dot{I}_{aA} \cdot \angle -240^\circ \quad (\text{Arms})$$

$$\dot{I}_{NM} = \dot{I}_{aA} + \dot{I}_{bB} + \dot{I}_{cC}$$

$$\boxed{\dot{I}_{NM} = 0}$$

CONCLUSÃO: com a presença do neutro podemos trabalhar com este problema pensando em um equivalente por fase (um circuito monofásico).

Exemplo: No circuito apresentado, determine as tensões e as correntes de fase e de linha, e calcule a potência dissipada (média, útil ou ativa) na carga.



$$\begin{aligned} \dot{V}_{an} &= 200 \angle 0^\circ \text{ Vrms} \\ \dot{V}_{bn} &= 200 \angle -120^\circ \text{ Vrms} \\ \dot{V}_{cn} &= 200 \angle -240^\circ \text{ Vrms} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tensões de} \\ \text{fase} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ab} &= \sqrt{3} \cdot 200 \angle 30^\circ \text{ Vrms} \\ \dot{V}_{ab} &= 346 \angle 30^\circ \text{ " } \\ \dot{V}_{bc} &= 346 \angle -90^\circ \text{ " } \\ \dot{V}_{ca} &= 346 \angle -210^\circ \text{ Vrms} \end{aligned}$$

Tensões de linha

$$\dot{I}_{aA} = \frac{\dot{V}_{an}}{Z} = \dot{I}_{AN} = \frac{\dot{V}_{AN}}{Z} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ} = 2 \angle -60^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_{bB} = \dot{I}_{BN} = 2 \angle -180^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_{cC} = \dot{I}_{CN} = 2 \angle -300^\circ \text{ Arms}$$

$$\uparrow$$

$$\dot{I}_{\text{linha}} = \dot{I}_{\text{fase}}$$

$$P_{AN} = V_{AN} \cdot I_{AN} \cdot \cos(\theta_{V_{AN}} - \theta_{I_{AN}})$$

$$P_{AN} = 200 \cdot 2 \cdot \cos(0 + 60^\circ)$$

$$P_{AN} = 200 \text{ W}$$

$$P_{TOTAL} = 3 \cdot 200$$

$$P_{TOTAL} = 600 \text{ W}$$

Exercício: Um sistema 3 ϕ a 3 fios balanceado alimenta uma carga conectada em Y. Cada uma das fases contém 3 cargas em paralelo: $-j100\Omega$; 100Ω e $50 + j50\Omega$. Assuma uma sequência de fases positiva com $\dot{V}_{ab} = 400 \angle 0^\circ$ (V).

Determine:

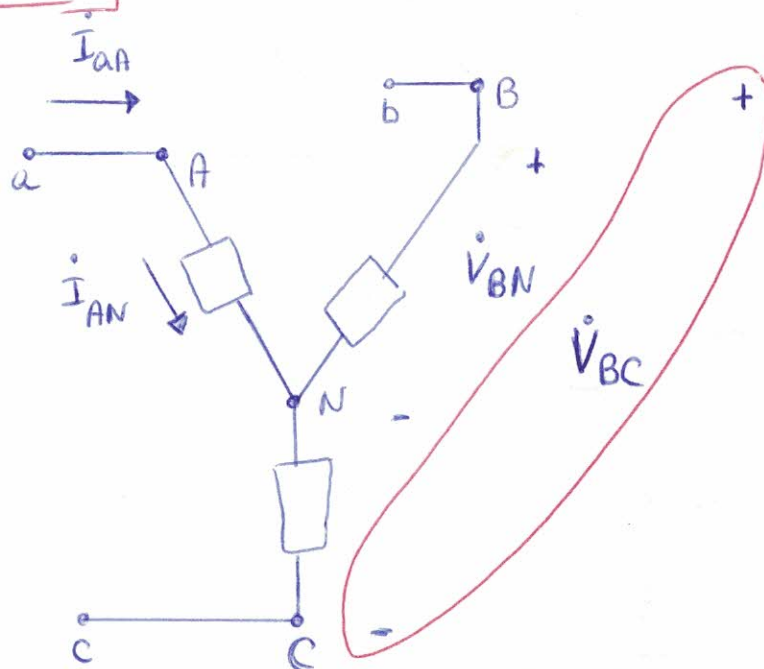
a) $\dot{V}_{an} = ?$ Resp: $\dot{V}_{an} = 231 \angle -30^\circ$ (V rms)

b) $\dot{I}_{aA} = ?$ Resp: $\dot{I}_{aA} = 4,62 \angle -30^\circ$ (A rms)

c) A potência total drenada (dissipada) na carga.

$$P_{\text{média, útil ou ativa}} = 3 \cdot 200 \text{ W}$$

Conexão em Y



$$\dot{I}_{\text{linha}} = \dot{I}_{aA} = \dot{I}_{\text{fase}} = \dot{I}_{AN}$$

$$\dot{I}_l = \dot{I}_f$$

$$|\dot{V}_{\text{linha}}| = |\dot{V}_{BC}| = \sqrt{3} |\dot{V}_{BN}| = \sqrt{3} |\dot{V}_{\text{fase}}|$$

$$|\dot{V}_{\text{linha}}| = \sqrt{3} |\dot{V}_{\text{fase}}| \quad \therefore$$

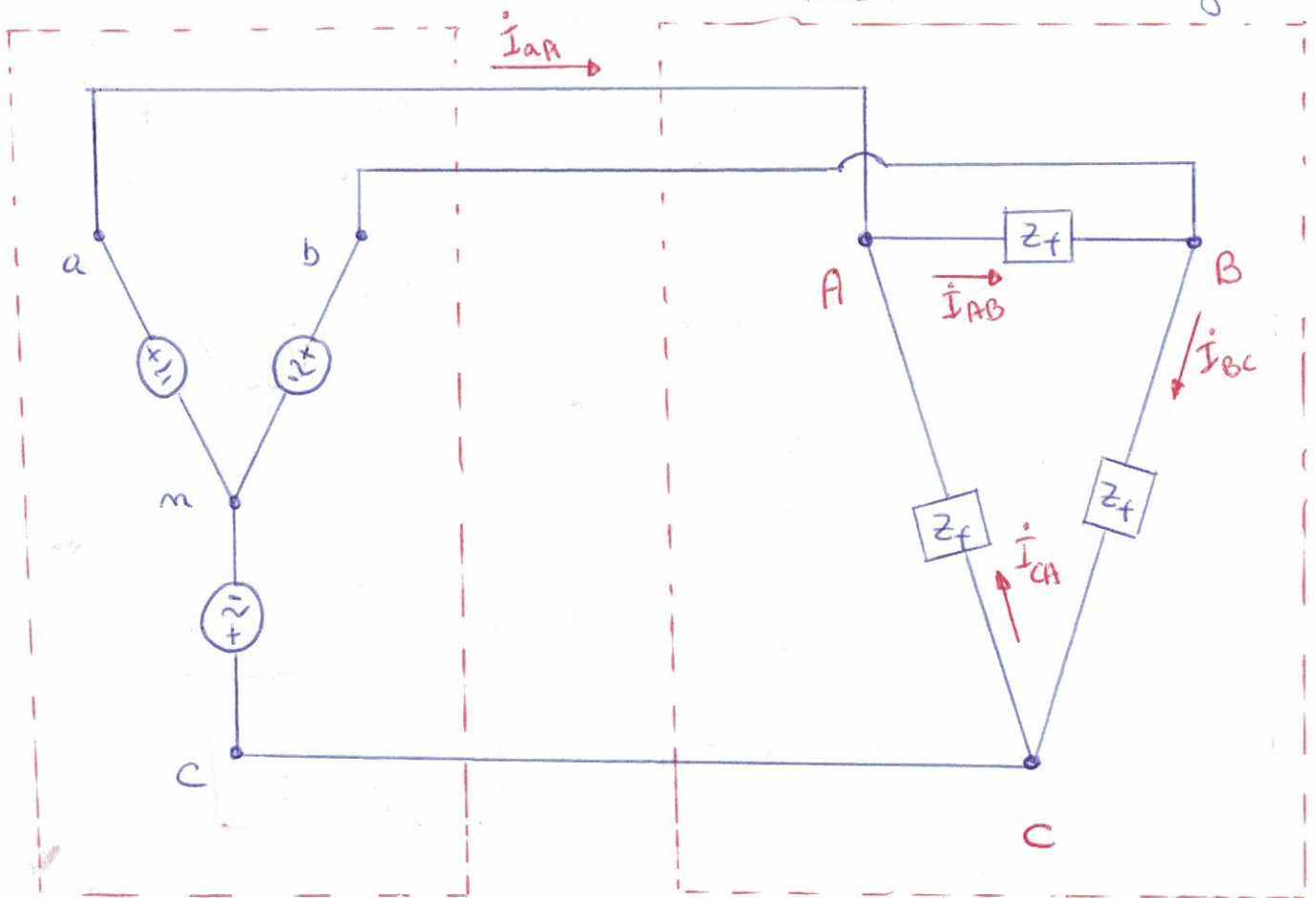
$$V_{\text{linha}} = \sqrt{3} V_{\text{fase}}$$

$$V_l = \sqrt{3} V_f$$

* válido p/ uma conexão em Y no lado das fontes e no lado das cargas!!!

* Y com ou sem a presença do neutro!!!

A conexão em triângulo (Δ) $\rightarrow$ usualmente encontrada no lado da carga !!!



lado das fontes

"normalmente" Y

lado das cargas

pode ser "Y" ou " Δ ", neste caso em " Δ " !!!

$$V_L = |\dot{V}_{ab}| = |\dot{V}_{bc}| = |\dot{V}_{ca}|$$

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{AB}$$

$$V_f = |\dot{V}_{an}| = |\dot{V}_{bn}| = |\dot{V}_{cn}|$$

$$\dot{V}_{bc} = \dot{V}_{BC}$$

$$\dot{V}_{ca} = \dot{V}_{CA}$$

$$I_L = I_f$$

$$V_L = \sqrt{3} V_f$$

Logo:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{ab}}{Z_p}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{bc}}{Z_p}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{ca}}{Z_p}$$

$\dot{I}_{aA} = ?$ chegando no nó "A" (terminal "A")?

* LKC $-\dot{I}_{aA} + \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 0$

$$\dot{I}_{aA} = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$$

Correntes com a mesma amplitude e defasadas de $120^\circ!!!$

$$|\dot{I}_{aA}| = \sqrt{3} I_f$$

$$I_L = \sqrt{3} I_f$$

Logo, no lado em delta (Δ ou triângulo)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{V}_{ab} = \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{bc} = \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{ca} = \dot{V}_{CA} \end{array} \right\} V_L = V_f$$

$$\left. \begin{array}{l} |\dot{I}_{AB}| = |\dot{I}_{BC}| = |\dot{I}_{CA}| = I_f \\ |\dot{I}_{aA}| = |\dot{I}_{bB}| = |\dot{I}_{cC}| = I_L \end{array} \right\} I_L = I_f \cdot \sqrt{3}$$

Resumindo

Conexão	Relações
Y	$I_L = I_f$ $V_L = \sqrt{3} \cdot V_f$
Δ	$I_L = \sqrt{3} \cdot I_f$ $V_L = V_f$

Exemplo: Determine a amplitude da corrente de linha em um sistema 3ϕ que possui tensão de linha de 300 V_{rms} e fornece 1.200 W a uma carga ^{balanceada} conectada em Δ , com um fp de $0,8$ atrasado e, em seguida, obtenha a impedância de fase.

Dados: $V_L = 300 \text{ V}_{rms}$
 $P_T = 1.200 \text{ W}$
 $\text{fp} = 0,8 \text{ atrasado}$

$\left. \begin{array}{l} \text{conexão} \\ \Delta \\ 3\phi \end{array} \right\}$

$I_L = ?$
 $Z_f = ?$

conexão Δ :

$$\begin{array}{l} I_L = \sqrt{3} I_f \\ V_L = V_f \end{array}$$

* Sistema equilibrado/balancado

$$\frac{P_T}{3} = V_f \cdot I_f \cdot \cos \theta$$

$$\frac{1.200}{3} = 300 \cdot I_f \cdot 0,8 \quad \therefore \boxed{I_f = 1,667 \text{ Arms}}$$

$$I_L = \sqrt{3} I_f$$

$$\therefore \boxed{I_L = 2,89 \text{ Arms}}$$

$$\begin{aligned} * \cos \theta = 0,8 & \quad \therefore \cos^{-1}(0,8) = 36,9^\circ \\ & \quad \theta = 36,9^\circ \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} * \cos \theta = 0,8 \\ \theta = 36,9^\circ \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{fp atrasado} \\ \text{carga com caracte-} \\ \text{rística indutiva} \end{array}$$

$$\boxed{\theta = +36,9^\circ}$$

$$Z_f = \frac{\dot{V}_f}{\dot{I}_f} = \frac{|\dot{V}_f| \angle +36,9^\circ}{|\dot{I}_f|}$$

$$Z_f = \frac{300}{1,667} \angle +36,9^\circ$$

$$\boxed{Z_f = 180 \angle +36,9^\circ (\Omega)}$$

Exercício: Cada fase de uma carga 3 ϕ balanceada conectada em Δ consiste em um indutor de 200mH em série com a combinação em paralelo de um capacitor de 5 μ F e uma resistência de 200 Ω .

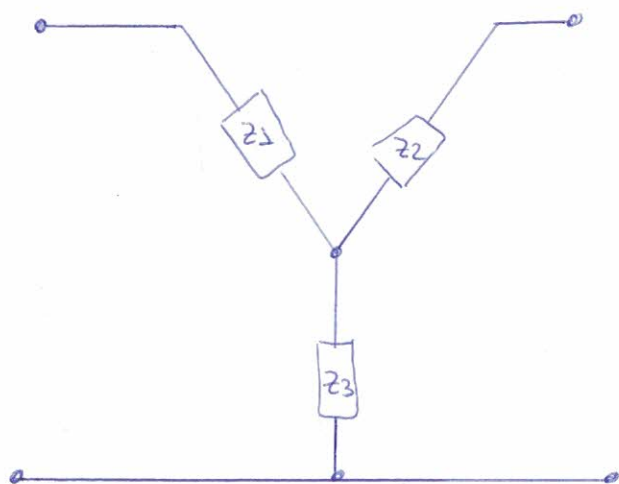
Assuma uma resistência nula nos condutores da linha e uma tensão de fase de $200 \text{ V}_{\text{rms}}$, com $\omega = 400 \text{ rad/s}$. Obtenha:

a) $I_f = ?$ Resp.: ~~1,58~~ $1,157 \text{ Arms}$

b) $I_L = ?$ Resp.: ~~2,73~~ 2 Arms

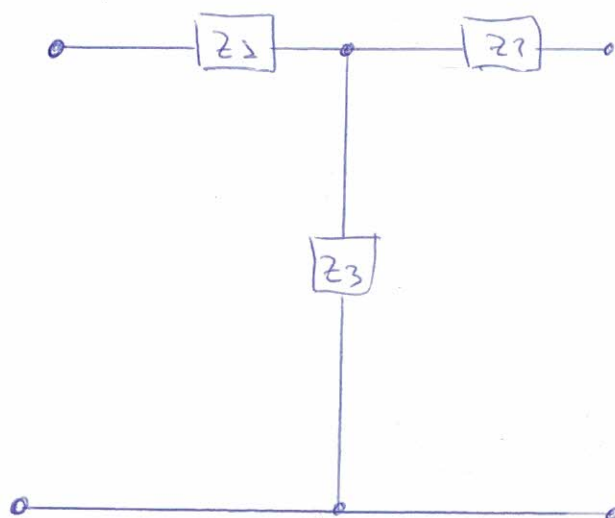
c) a potência total média (util ou ativa) absorvida pela carga. Resp.: 693 W

Transformações $Y \rightarrow \Delta$ (estrela-triângulo)

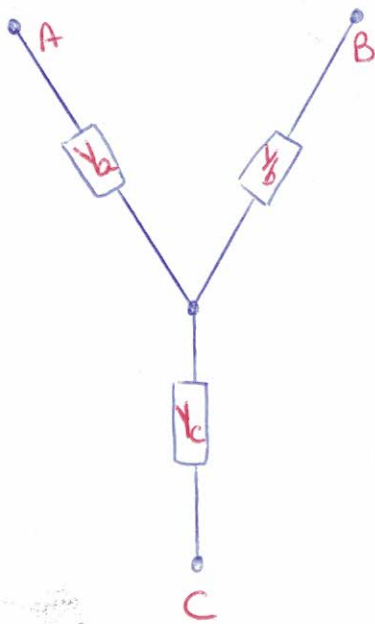


Y - estrela

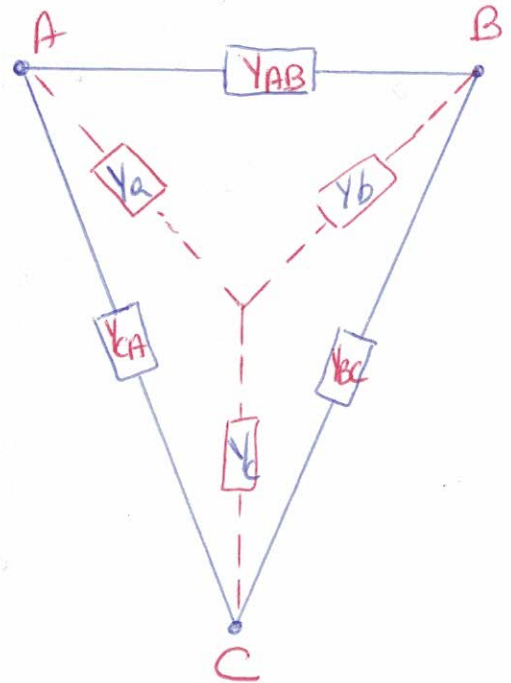
ou



Δ (triângulo)



$\equiv$

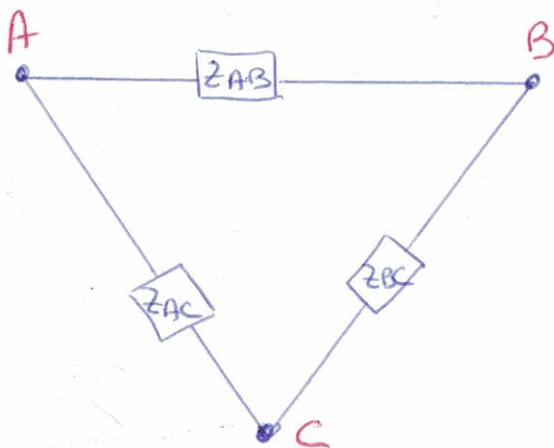


$$Y_{AB} = \frac{Y_A \cdot Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

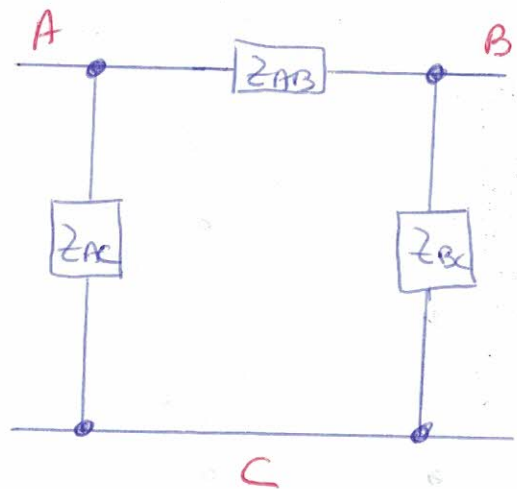
$$Y_{BC} = \frac{Y_B \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

$$Y_{CA} = \frac{Y_A \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

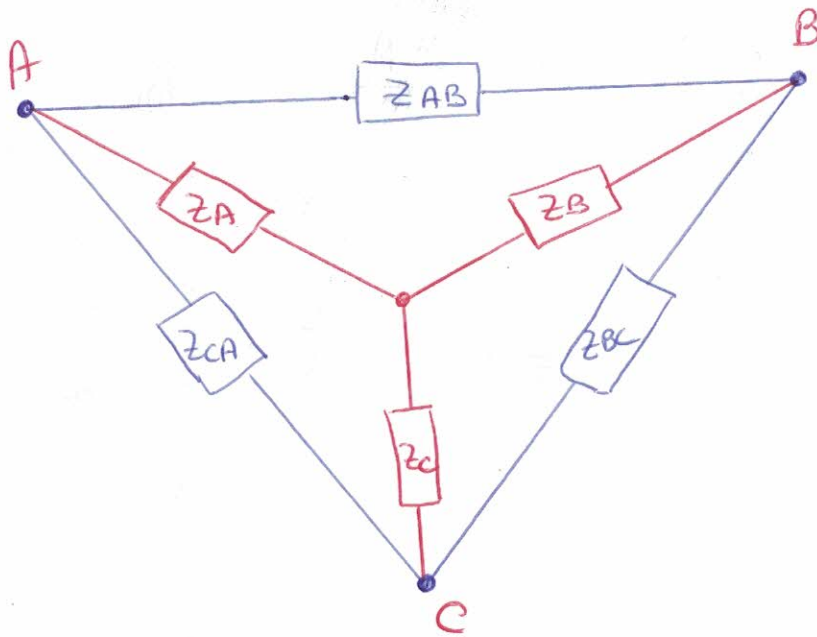
Transformações $\Delta \rightarrow Y$ (triângulo-estrela)



Δ - delta ou triângulo



Π (pi)

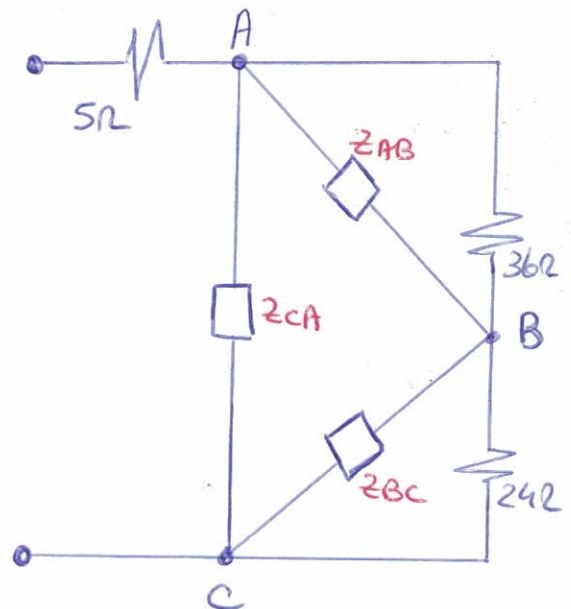
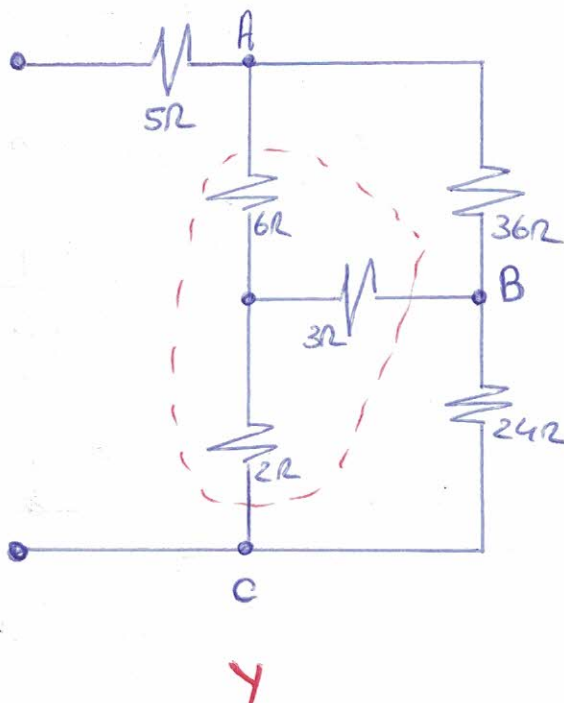


$$Z_A = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

$$Z_B = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

$$Z_C = \frac{Z_{BC} \cdot Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

Exemplo: Calcule a impedância de entrada Z .



$$Y_A = 0,1667 \text{ S}$$

$$Y_B = 0,3333 \text{ S}$$

$$Y_C = 0,5 \text{ S}$$

$$Y_{AB} = \frac{Y_A \cdot Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{0,1667 \cdot 0,3333}{0,1667 + 0,3333 + 0,5} = \frac{0,0556}{1} \quad Y_{AB} = 0,0556 \text{ S}$$

$$Y_{BC} = \frac{Y_B \cdot Y_C}{Y_T} = \frac{0,3333 \cdot 0,5}{1} \quad Y_{BC} = 0,1667 \text{ S}$$

$$Y_{CA} = \frac{Y_C \cdot Y_A}{Y_T} = \frac{0,5 \cdot 0,1667}{1} \quad Y_{CA} = 0,0833 \text{ S}$$

$$Z_{AB} = \frac{1}{Y_{AB}} = \frac{1}{0,0556} \quad Z_{AB} = 18 \Omega$$

$$Z_{BC} = \frac{1}{Y_{BC}} = \frac{1}{0,1667} \quad Z_{BC} = 6 \Omega$$

$$Z_{CA} = \frac{1}{Y_{CA}} = \frac{1}{0,0833} \quad Z_{CA} = 12 \Omega$$

Exercício: Uma fonte 3 ϕ equilibrada com $V_L = 100 \text{ Vrms}$ entrega potência a uma carga equilibrada conectada em Y com impedâncias de fase $Z_1 = 8 + j6 \Omega$ em paralelo com uma carga equilibrada conectada em Δ com impedâncias de fase $Z_2 = 12 + j9 \Omega$. Calcule a potência entregue pela fonte. Resp.: 2,4 kW

Solução: Encontrar

$$V_F = |Z| I_F$$

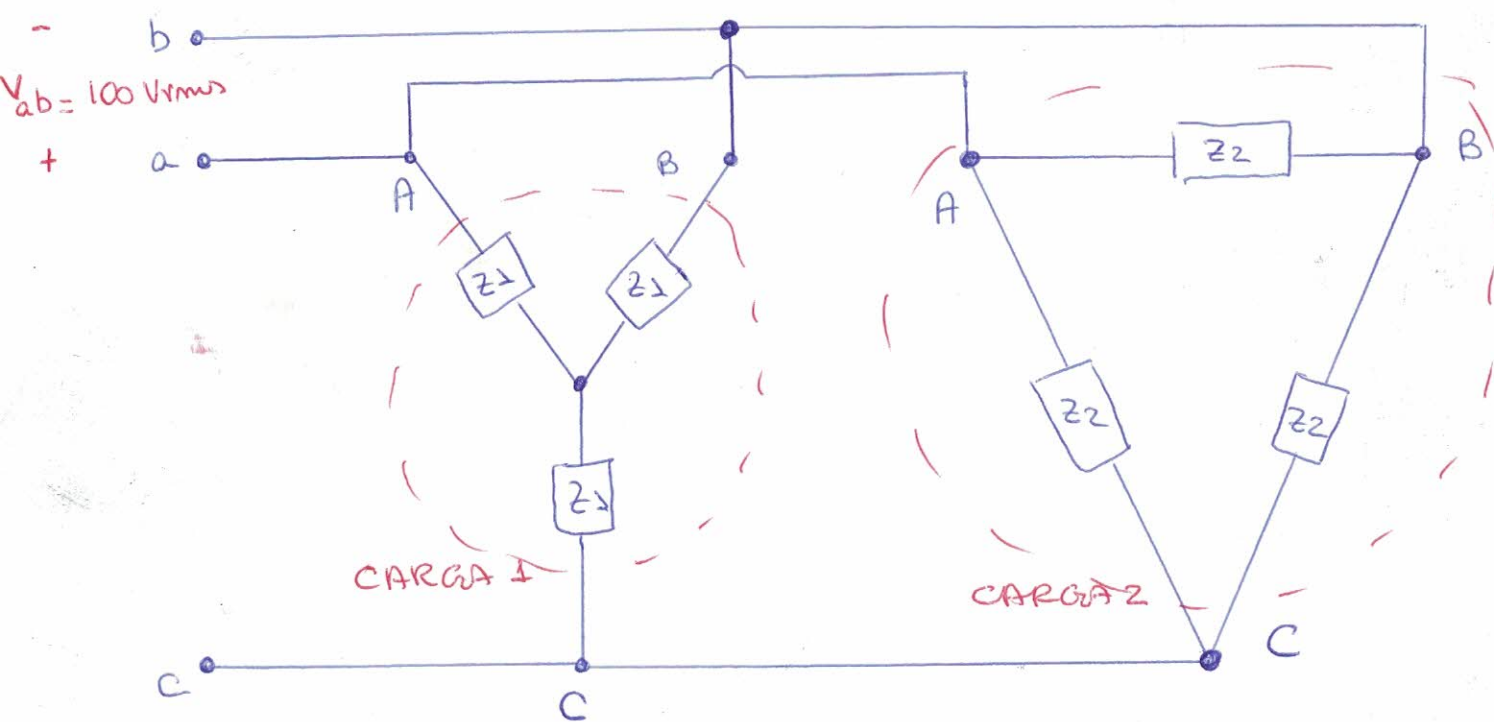
$$P_F = V_F \cdot I_F \cdot \cos \theta_T$$

$$Z_{\text{TOTAL}} = Z_{\text{EQUIV.}} = |Z| \angle \theta_T$$

$$\theta_T = \theta_V - \theta_I$$

$$\text{fp} = \cos \theta_T$$

$P_T = 3 P_F$: circuito equilibrado/balanceado!!!



$$Z_1 = 8 + j6 \Omega$$

$$Z_2 = 12 + j9 \Omega$$

a) CARGA 1 p/ Δ : $\Delta // \Delta \rightarrow Z_{\text{TOTAL}}$

b) CARGA 2 p/ Y : $Y // Y \rightarrow Z_{\text{TOTAL}}$

Matéria de prova

* Medição de potência em sistemas trifásicos

Johnson: pp. 336-338

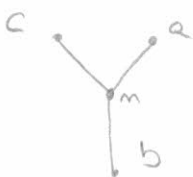
Exercícios recomendados:

13.1.2 / 1.3 e 1.4

13.2.1 / 2.2 / 3.2 e 3.3

13.5.1 / 2 e 3

13.1 / 3 / 5 / 7 / 9 / 15 / 23 / 25 / 31 e 35



$$P_F = V_F \cdot I_F \cdot \cos \theta$$

$$P_T = 3 P_F \quad \therefore \quad P_T = 3 V_F \cdot I_F \cdot \cos \theta$$

$$V_L = \sqrt{3} V_F$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos \theta$$

$$I_L = I_F$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos \theta$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \theta$$



$$P_F = V_F \cdot I_F \text{ watt}$$

$$V_L = V_F$$

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

$$P_T = 3 P_F$$

$$P_T = 3 \cdot V_F \cdot I_F \text{ watt}$$

$$P_T = 3 \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \text{ watt}$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \text{ watt}$$

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \text{ watt}$$

Carga em Y
ou
Fonte em Y

$$V_L = \sqrt{3} V_F$$

$$I_L = I_F$$

$$P_F = V_{F} \cdot I_{F} \cdot \cos \theta$$

$$P_T = 3 P_F$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{V_{\phi L}}{\sqrt{3}} \cdot I_{\phi L} \cdot \cos \theta$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V_{\phi L}}{\sqrt{3}} \cdot I_{\phi L} \cdot \cos \theta$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_{\phi L} \cdot I_{\phi L} \cdot \cos \theta \text{ (W)}$$

Carga em Δ

$$V_L = V_F$$

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

$$P_T = 3 \cdot P_F$$

$$P_T = 3 \cdot V_{\phi F} \cdot I_{\phi F} \cdot \cos \theta$$

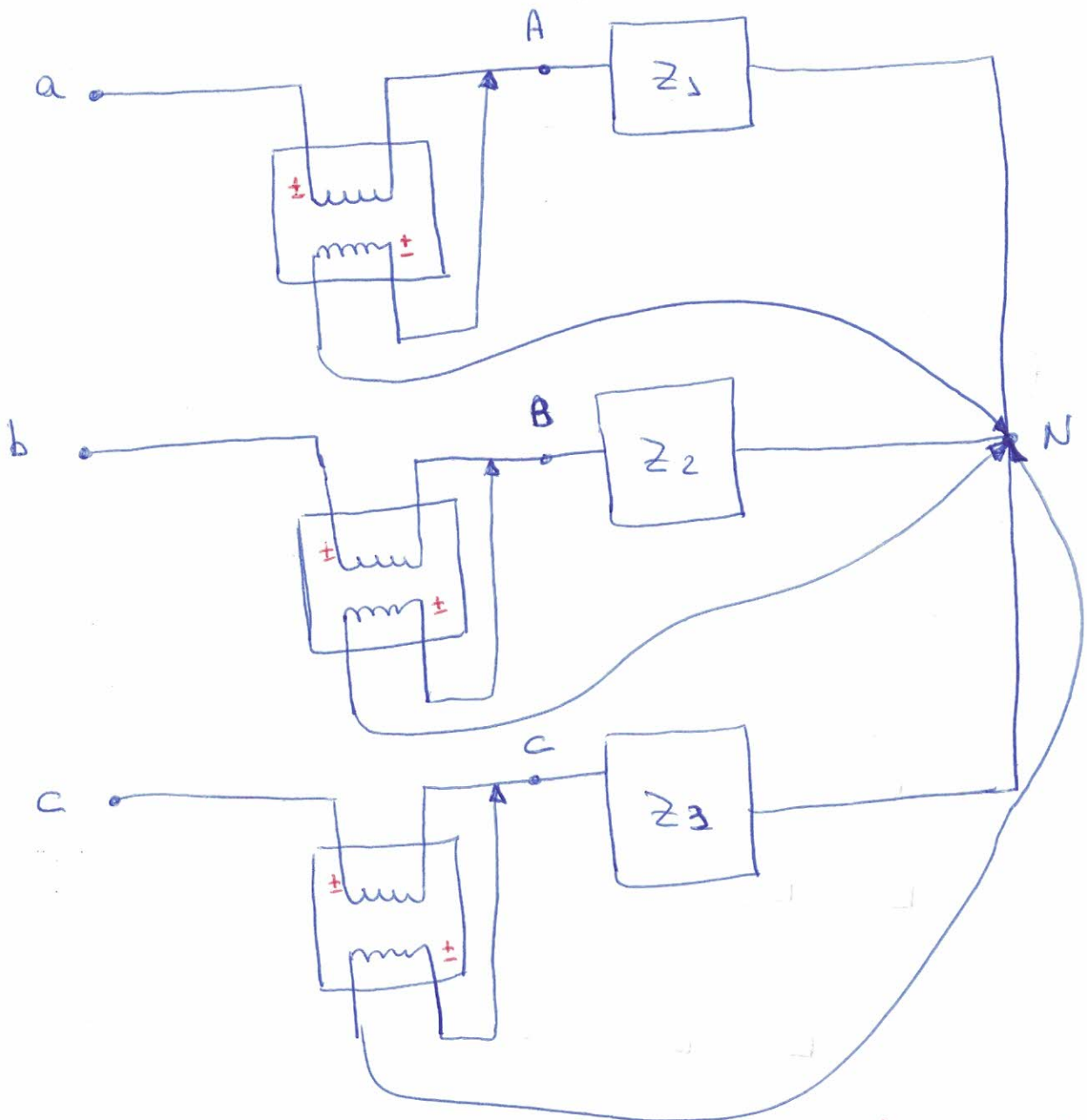
$$P_T = 3 \cdot V_{\phi E} \cdot \frac{I_{\phi E}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta$$

$$P_T = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot V_{\phi E} \cdot \frac{I_{\phi E}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta$$

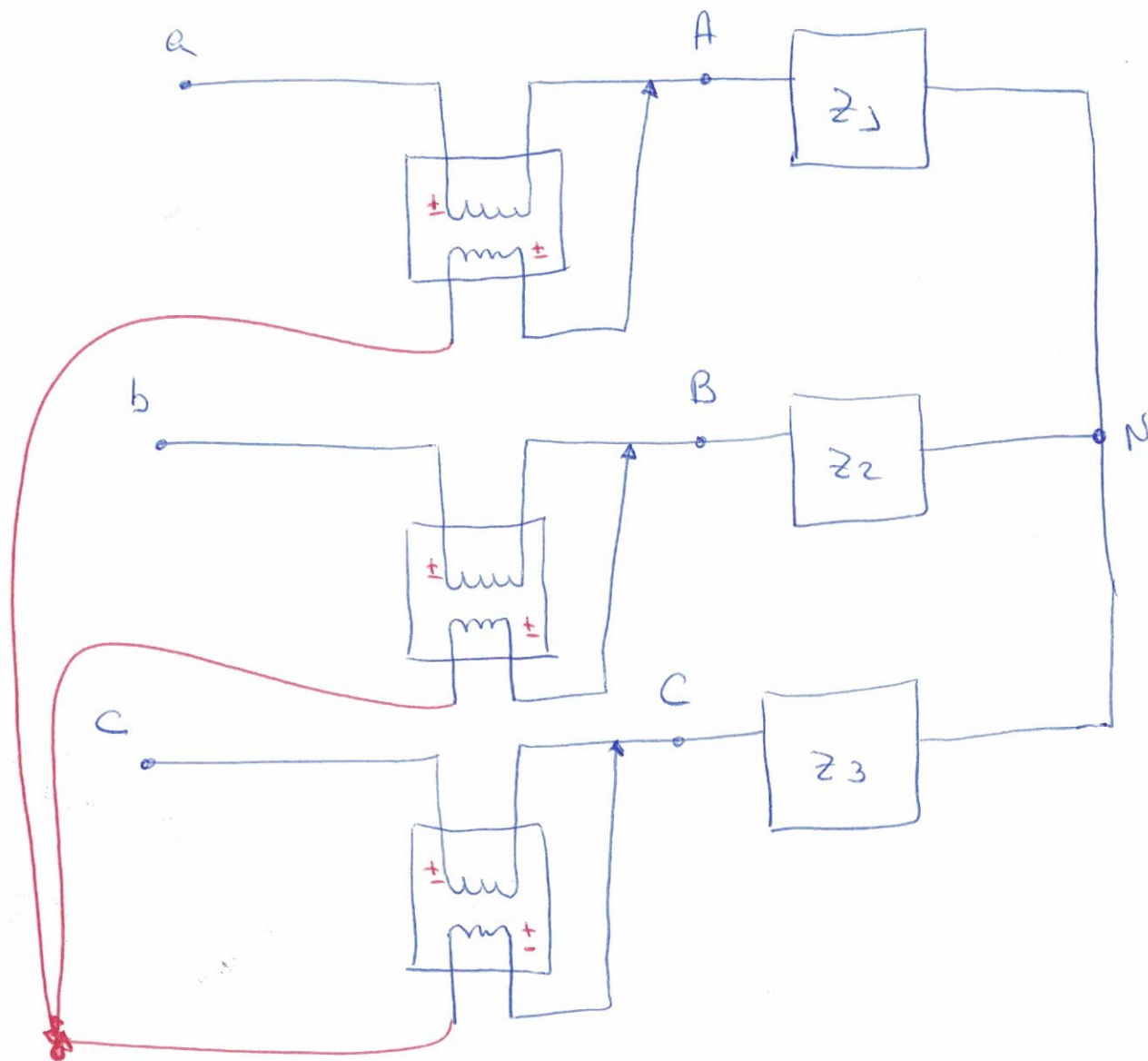
$$P_T = \sqrt{3} V_{\phi L} \cdot I_{\phi L} \cdot \cos \theta \text{ (W)}$$

Medida da Potência

- * equipamento: wattímetros
- * O método é geral e aplicável tanto em sistemas equilibrados, quanto desequilibrados.



Medida de potência com três wattímetros e com
acesso ao neutro "N"!



X

Três wattímetros conectados a um ponto comum
- sem acesso ao neutro!

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{Ax} \cdot i_{aA} + v_{Bx} \cdot i_{bB} + v_{Cx} \cdot i_{cC}) dt$$

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$

$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Bx}$$

$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (V_{AN} i_{aA} + V_{BN} i_{bB} + V_{CN} i_{cC}) dt +$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_{Nx} (i_{aA} + i_{bB} + i_{cC}) dt$$

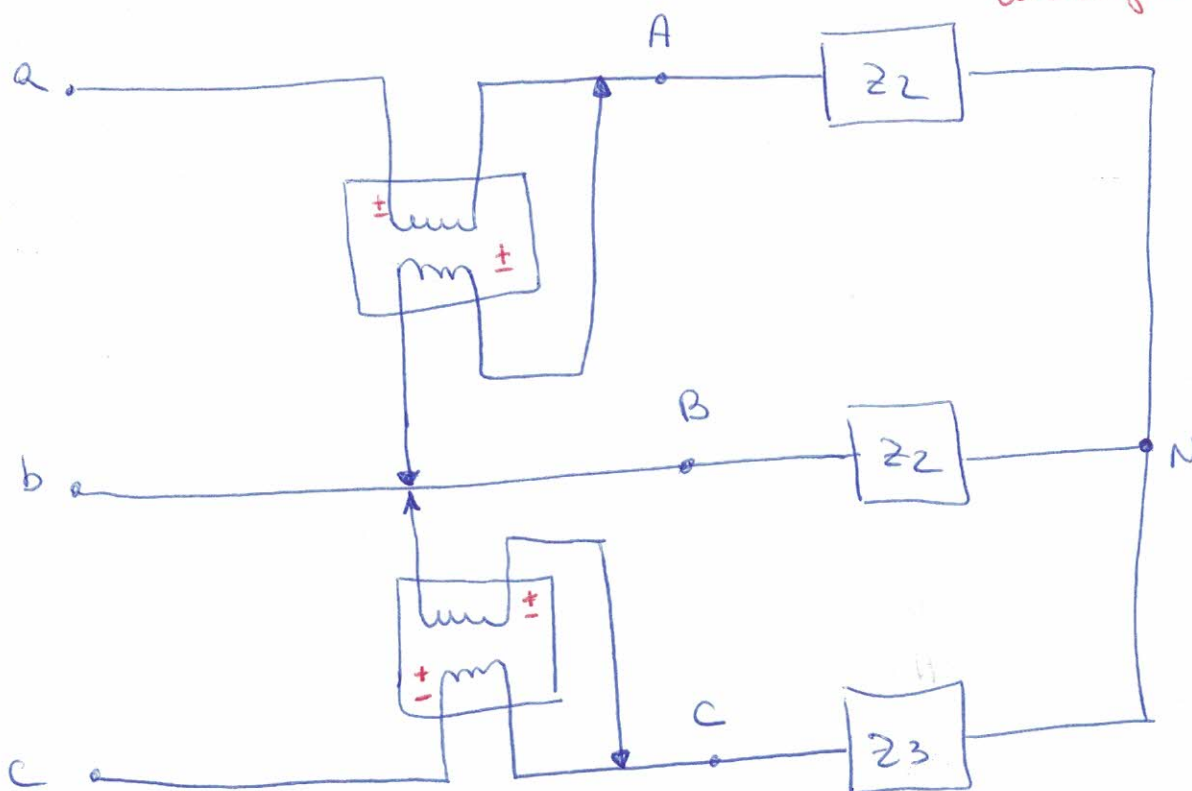
* Pela LKC: $i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$

* De modo que:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (\underbrace{V_{AN} i_{aA}} + \underbrace{V_{BN} i_{bB}} + \underbrace{V_{CN} i_{cC}}) dt \quad *$$

Desta forma, a soma das leituras dos três wattímetros é exatamente a potência média total entregue à carga trifásica, pois os três termos no integrando são as potências instantâneas das fases.

Dois wattímetros indicando a potência total da carga



* O medidor indicando zero é desnecessário!

$$* P = P_A + P_C$$

* Um ^{ou} outro dos wattímetros pode indicar uma leitura negativa, e, neste caso a soma das duas leituras é a soma ALGÉBRICA!

Exemplo: Considerando as tensões de linha equilibradas e em sequência abc, com;

$$\dot{V}_{AB} = 100\sqrt{3} \angle 0^\circ \text{ (Vrms)}$$

e impedâncias nas cargas dadas por:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10 + j10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Teremos:

$$\dot{V}_{CB} = -\dot{V}_{BC} = -100\sqrt{3} \angle -120^\circ = 100\sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ (Vrms)}$$

$$\dot{I}_{2A} = \frac{\dot{V}_{AN}}{Z_1} = \frac{100\sqrt{3} \angle -30^\circ}{\frac{10\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{2} \angle -75^\circ \text{ Arms}$$

$$\dot{I}_{cC} = 5\sqrt{2} \angle -315^\circ \text{ (Arms)}$$

As leituras nos medidores:

$$P_A = |\dot{V}_{AB}| |\dot{I}_{AA}| \cos(\theta_{VAB}^\circ - \theta_{IAA}^\circ)$$

$$P_A = (100\sqrt{3})(5\sqrt{2}) \cos(0 + 75^\circ)$$

$$P_A = \cancel{317} \text{ (W)} \quad 317 \text{ (W)}$$

$$P_C = |\dot{V}_{CB}| |\dot{I}_{CC}| \cos(\theta_{VCB}^\circ - \theta_{ICC}^\circ)$$

$$P_C = (100\sqrt{3})(5\sqrt{2}) \cos(60^\circ + 315^\circ)$$

$$P_C = 1183 \text{ (W)}$$

$$P = P_A + P_C = 1500 \text{ (W)}$$

Potência entregue à fase A:

$$P_F = |\dot{V}_{AV}|_f |\dot{I}_{AA}|_f \cos(\theta_{VAV}^\circ - \theta_{IAA}^\circ)$$

$$P_F = \left(\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) (5\sqrt{2}) \cos(-30^\circ + 75^\circ)$$

$$P_F = 500 \text{ (W)}$$

$$P_T = 3 P_F$$

$$P_T = 1500 \text{ (W)}$$