SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM $\mathbb{R}^n$

Consideremos agora o sistema linear homogêneo de n equações com coeficientees constantes

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

Na forma matricial, temos o sistema $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo $\mathbf{A}$ a matriz

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}
$$

sendo

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.
$$

Seja $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} + \lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \det(A - \lambda)$ o polinômio característico de A. Então $p(\lambda)$ pode ser decomposto como produto de termos de grau 1.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as raízes de p (complexas, algumas eventualmente repetidas).

Date: June 12, 2020.

Definição 1. *A multiplicidade* algébrica *de λ_i é o número de vezes que λ_i se repete na decomposição acima.*

A multiplicidade geométrica *de λ_i é a dimensão do autoespaço associado a λ_i.*

Vamos considerar as diferentes situações para a multiplicidade dos autovalores. Podemos supor que os autovalores estão de ordenados de forma que:

1) Os primeiros m_1 autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{m_1}$ são reais e distintos, e sejam $v_1, v_2, \cdots, v_{m_1}$ os autovetores correspondentes. Então, como vimos no caso do plano, teremos m_1 soluções linearmente independentes $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \cdots, x_m(t) = e^{\lambda_{m_1} t} v_{m_1}$.

2) Os autovalores seguintes $\lambda_{m_1+1}, \lambda_{m_1+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2}$ são reais, têm multiplicidade algébrica e geométrica iguais e maiores do que 1. Este caso é análogo ao anterior, temos novamente m_2 soluções linearmente independentes da forma: $x_1(t) = e^{\lambda_{m_1+1} t} v_{m_1+1}, \cdots, x_m(t) = e^{\lambda_{m_1+m_2} t} v_{m_1+m_2}$.

3) Os autovalores seguintes $\lambda_{m_1+m_2+1}, \lambda_{m_1+m_2+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3}$ são reais, têm multiplicidade geométrica 1 e multiplicidade algébrica maior do que 1. Vimos, no caso do plano que, se a multiplicidade algébrica de λ_i é 2, então temos 2 soluções linearmente independentes $x_1(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ e $x_2(t) = t e^{\lambda_i t} w_i$, sendo w_i autovetor generalizado.

De maneira análoga, podemos mostrar que, se a multiplicidade algébrica de λ_i é 3, então temos 3 soluções linearmente independentes $x_1(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, $x_2(t) = t e^{\lambda_i t} w_i$ e $x_2(t) = t^2 e^{\lambda_i t} z_i$, w_i, z_i autovetores generalizados.

E assim sucessivamente, conforme a multiplicidade algébrica aumenta.

4) Os autovalores seguintes
$\lambda_{m_1+m_2+m_3+1}, \lambda_{m_1+m_2+m_3+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4}$ são complexos e têm multiplicidade algébrica e geométrica iguais

Nesse caso, como vimos no caso real, teremos m_4 soluções *complexas* linearmente independentes do tipo $x_i(t) = e^{\lambda_1 t} v_i$, sendo v_i autovetor complexo associado a λ_i, $m_1 + m_2 + m_3 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

A cada par de autovalores complexos conjugados $\lambda_i = v_i^1 + iv_i^2$, $\overline{\lambda_i} = v_i^1 - iv_i^2$, teremos 2 soluções reais linearmente independentes $e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 - \text{sen } \beta t v^2)$ e $e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 + \text{sen } \beta t v_i^2)$

5) Os autovalores seguintes

$\lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+1}, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}$ são complexos e têm multiplicidade geométrica 1 e multiplicidade algébrica maior do que 1.

Nesse caso a cada par de autovalores complexos conjugados $\lambda_i = v_i^1 + iv_i^2$, $\overline{\lambda_i} = v_i^1 - iv_i^2$, teremos $2k$ soluções reais linearmente independentes da forma:

$e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 - \text{sen } \beta t v^2)$, $e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 + \text{sen } \beta t v_i^2)$
$te^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 - \text{sen } \beta t v^2)$, $te^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 + \text{sen } \beta t v_i^2)$
$t^2 e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 - \text{sen } \beta t v^2)$, $t^2 e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 + \text{sen } \beta t v_i^2)$
$\ddots$
$t^{k-1} e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 - \text{sen } \beta t v^2)$, $t^{k-1} e^{\alpha t}(\cos \beta t v_i^1 + \text{sen } \beta t v_i^2)$.

Assim, em qualquer caso, podemos encontrar n soluções linearmente independentes e, portanto, a solução geral do sistema.

Exemplo 2. *Encontrar a solução geral do sistema:*

$$\begin{aligned} \frac{d\,x}{d\,t} &= x - 2y + 2z \\ \frac{d\,y}{d\,t} &= -2x + y - 2 \\ \frac{d\,z}{d\,t} &= 2x - 2y + z \end{aligned}$$

Solução. Na forma matricial, temos o sistema; $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. A equação característica é:

$$det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0.$$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A primeira linha da matriz significa que $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é autovetor, se $x - y + z = 0$. Fazendo $y = 1$ e $z = 0$, obtemos o autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, fazendo $y = 0$ e $z = 1$, obtemos o autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como v_1 ev_2 são L.I., a multiplicidade algébrica e geométrica de $\lambda = -1$ são ambas iguais a 2 e, portanto, obtemos as soluções L.I de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}$,

$$\mathbf{x}_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 5$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A primeira linha da matriz significa que $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é autovetor, se $x = z$ e a segunda que $y = -z$ Fazendo $z = 1$, obtemos o autovetor $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, a solução L.I de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}_1 = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a solução geral é dada por:

$$\mathbf{x} = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3. *Encontrar as solução geral para o sistema de duas massas e três molas da figura abaixo, sendo k_1, k_2 e k_3 as constantes de Hooke das molas e supondo $F_1(t) = F_2(t) \equiv 0$.*

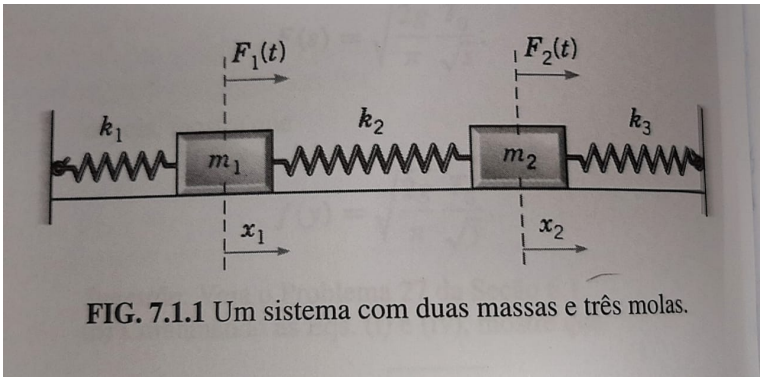


FIG. 7.1.1 Um sistema com duas massas e três molas.

FIGURE 1.

Usando a 2^a lei de Newton, obtemos um sistemas de duas equações de segunda ordem:

Encontrar a solução geral do sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

Definindo: $y_1 = x_1$,$y_2 = x_2$ $y_3 = \frac{d x_1}{d t}$, $y_4 = \frac{d x_2}{d t}$, obtemos o sistema de linear de 1^a ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,y_1}{d\,t} &= y_3 \\
\frac{d\,y_2}{d\,t} &= y_4 \\
\frac{d\,y_3}{d\,t} &= -2y_1 + (3/2)y_2 \\
\frac{d\,y_4}{d\,t} &= (4/3)y_1 - 3y_2,
\end{aligned}$$

ou, na forma matricial, $\frac{d\,\mathbf{y}}{d\,t} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A equação característica é:

$$\begin{aligned}
det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & -\lambda & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda^4 + 5\lambda^2 = 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0.
\end{aligned}$$

Os autovetores da matriz $\mathbf{A}$ são

$v_1 = \begin{bmatrix} 3i/8 \\ -i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -3i/8 \\ i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -3i/2 \\ -i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 3i/2 \\ i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

com autovalores associados $2i, -2i, i$ e $-i$, respectivamente.
Temos, portanto, as soluções complexas, linearmente independentes.

$$y_1 = e^{2i}\begin{bmatrix} 3i/8 \\ -i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix},\ y_2 = e^{-2i}\begin{bmatrix} -3i/8 \\ i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix},\ y_3 = e^{i}\begin{bmatrix} -3i/2 \\ -i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y_4 = e^{-i}\begin{bmatrix} 3i/2 \\ i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando e colocando na forma Re + i Im:

$$y_1 = \begin{bmatrix} -3sin(2)/8 \\ sin(2)/2 \\ --(3cos(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 3cos(2))/8 \\ -cos(2)/2 \\ -(3sen(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} -3sin(2)/8 \\ sin(2)/2 \\ -(3cos(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 3cos(2))/8 \\ +cos(2)/2 \\ (3sen(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Observe que $y_2 = \overline{y_1}$)

$$y_3 = \begin{bmatrix} 3sin(1)/2 \\ sin(1) \\ (3cos(1))/2 \\ cos(1) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -3cos(1)/2 \\ -cos(1) \\ (3sen(1))/2 \\ sen(1) \end{bmatrix}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} 3sin(1)/2 \\ sin(1) \\ (3cos(1))/2 \\ cos(1) \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} -3cos(1)/2 \\ -cos(1) \\ (3sen(1))/2 \\ sen(1) \end{bmatrix}$$

Tomando as partes real e imaginária de y_1 e y_2, encontramos soluções *reais* linearmente independentes.

Daí, obtemos a solução geral

$$y = c_1 \begin{bmatrix} -3sin(2)/8 \\ sin(2)/2 \\ --(3cos(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3cos(2))/8 \\ -cos(2)/2 \\ -(3sen(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3sin(1)/2 \\ sin(1) \\ (3cos(1))/2 \\ cos(1) \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -3cos(1)/2 \\ -cos(1) \\ (3sen(1))/2 \\ sen(1) \end{bmatrix}.$$

1. Exponencial de matrizes

Consideremos novamente o sitema de equações na forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. No caso de uma única equação, ou seja, para o problema de valor inicial, $\dot{x} = ax,\ a \in \mathbb{R},\ c(0) = x_0$, sabemos que a solução é dada pela exponencial $x(t) = e^{at}x_0$. Isto pode sugerir a possibilidade de definir a *exponencial de matrizes* $e^{\mathbf{A}}$ de tal forma que a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ seja, analogamente, $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$.

1.1. **Definição por série de potências.** Lembrando que $f(x) = e^x$ é igual à sua série de Taylor em torno da origem, isto é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!},$$

definimos

Definição 4. *A exponencial de uma matriz* $\boldsymbol{A}$ $n \times n$*:*

$$e^{\boldsymbol{A}} = 1 + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!},$$

É possível mostrar que a série acima de fato converge para qualquer matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes reais (e mesmo complexos) e que satisfaz propriedades análogas à da exponencial de números. Em particular, vale que

(1) Se $\mathbf{A}$ é matriz diagonal então a exponencial $e^{\mathbf{A}}$ também é matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $e^{\mathbf{A}}$ são as exponenciais dos elementos correspondes da diagonal de $\mathbf{A}$.
(2) Se $\mathbf{A}$ é matriz nilpotente, isto é $\mathbf{A}^n = 0$ para n suficientemente grande então a série da exponencial se torna uma soma *finita*.
(3) Se $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^{-1}$ então $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{M}e^{\mathbf{A}}\mathbf{M}^{-1}$.

Exemplo 5. *Calcular* $e^{\boldsymbol{A}}$ *nos casos:*

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Supondo que podemos derivar a somatória termo a termo, podemos provar o seguinte resultado importante

Proposição 6. *Se* $\boldsymbol{A}$ *é matriz* $n \times n$ *então* $\frac{d}{dt} e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$.
Portanto, a (única) solução do problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$
$$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$$

é $\boldsymbol{X(t)} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}_0$.

Uma aplicação deste resultado ao cálculo de exponencias de matrizes é o seguinte

Corolário 7. *Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes $n \times n$ que comutam então $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}} e^{\boldsymbol{B}}$.*

Exemplo 8. *Calcular $e^{t\boldsymbol{A}}$ sendo*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora consideremos novamente o problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

Sabemos da proposição 6 que $e^{t\mathbf{A}}\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t)$. Se pudermos encontrar uma matriz $U(t)$ tal que $U(t)X_0$ é a solução do P.V.I., isto é $\frac{d}{dt}\ \mathbf{U}(t)\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{U}(t)\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{U}(0)\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0$ (ou seja $\mathbf{U}(0) = I$ por qualquer método teremos, necessariamente $e^{t\mathbf{A}} = U(t)$. Vejamos como encontrar $U(t)$, usando o método estudado na seção anterior.

Exemplo 9. *No exemplo 2 acima, vimos que a solução geral do sistema $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, sendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ é dada por:}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz $M(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}$ *satisfaz* $\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{X}_0$. *Tomando* $\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{M}(t)\,\boldsymbol{M}(0)^{-1}$ *teremos então* $\boldsymbol{U}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}$. *Portanto*

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$