

Geometria Analítica

A reta no Espaço

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Equação Vetorial da Reta

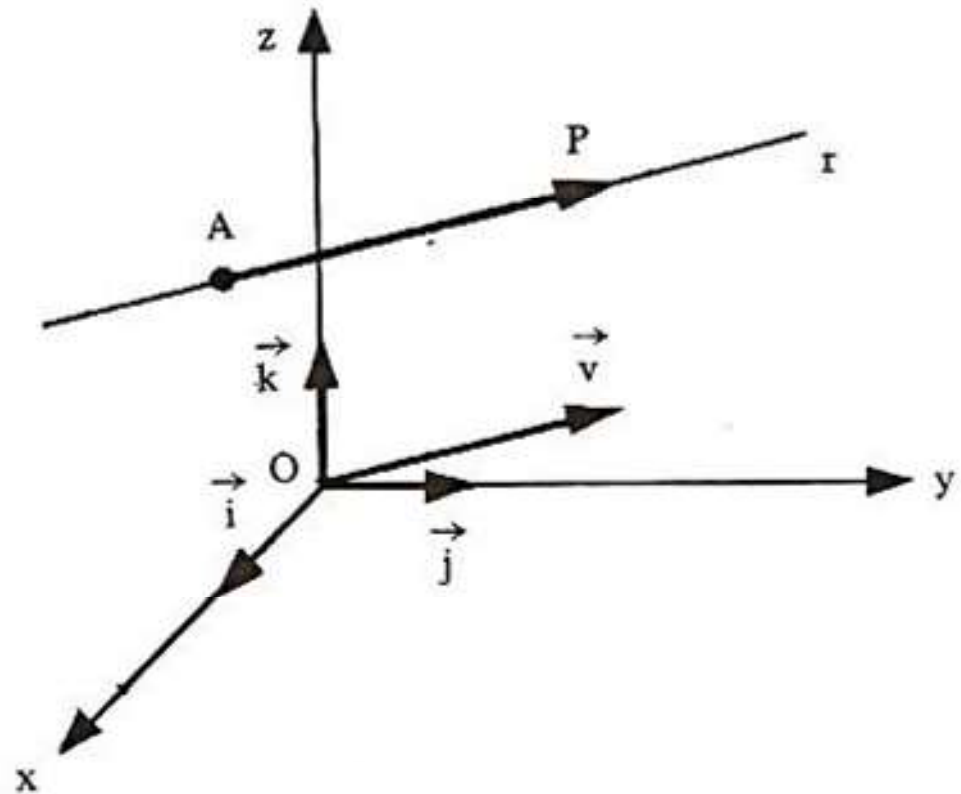
Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não-nulo \vec{v} . Para que um ponto P do espaço pertença à reta r , é necessário e suficiente que os vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$$

ou

$$P - A = \lambda \vec{v}$$

$$P = A + \lambda \vec{v}$$



Equações Paramétricas da Reta

Sejam $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y, z)$ e $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da reta r , e $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ um vetor de mesma direção de r .

$$P = A + \lambda\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + \alpha\lambda, y_0 + \beta\lambda, z_0 + \gamma\lambda)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{array} \right.$$

Equações Simétricas da Reta

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x - x_0}{\alpha} \\ \lambda = \frac{y - y_0}{\beta} \\ \lambda = \frac{z - z_0}{\gamma} \end{array} \right.$$

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas** ou normais de uma reta que passa por um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Equações Reduzidas da Reta

$$\left\{ \begin{array}{l} y = mx + n \\ z = px + q \end{array} \right.$$

Estas são as **equações reduzidas da reta**.

Retas paralelas ao plano e aos eixos coordenados

Equações
Paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{array} \right.$$

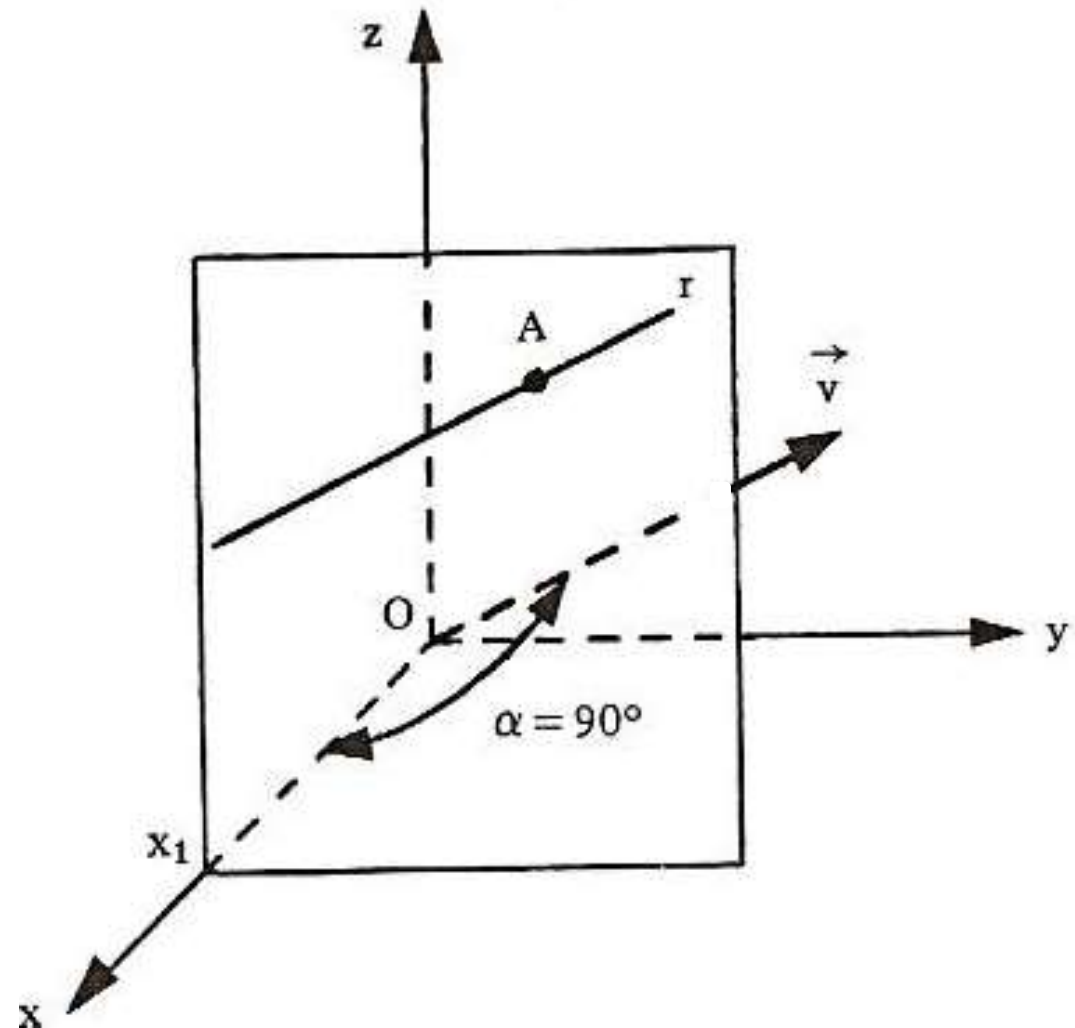
Equações
Simétricas

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

1) Uma das componentes de \vec{v} é nula.

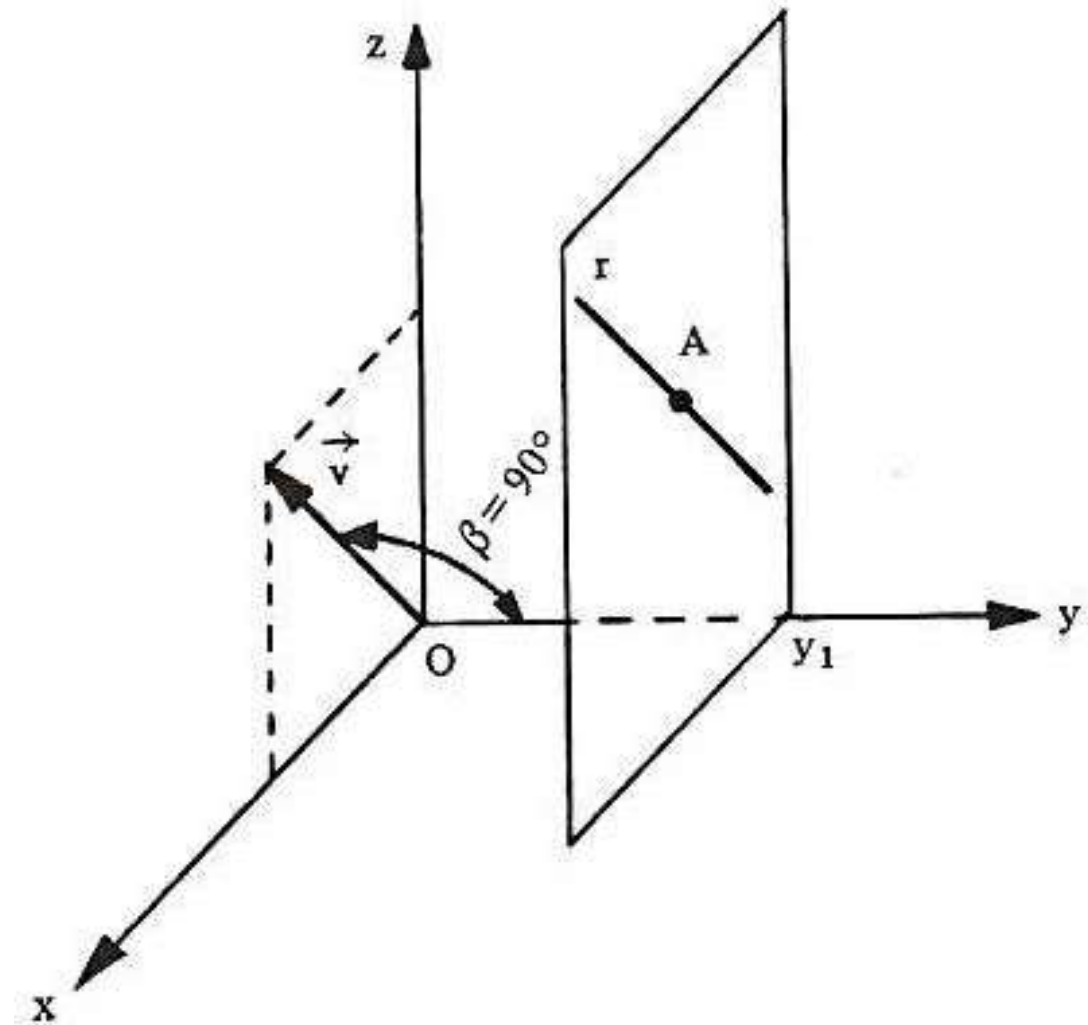
$$\alpha = 0, \vec{v} = (0, \beta, \gamma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \end{array} \right.$$



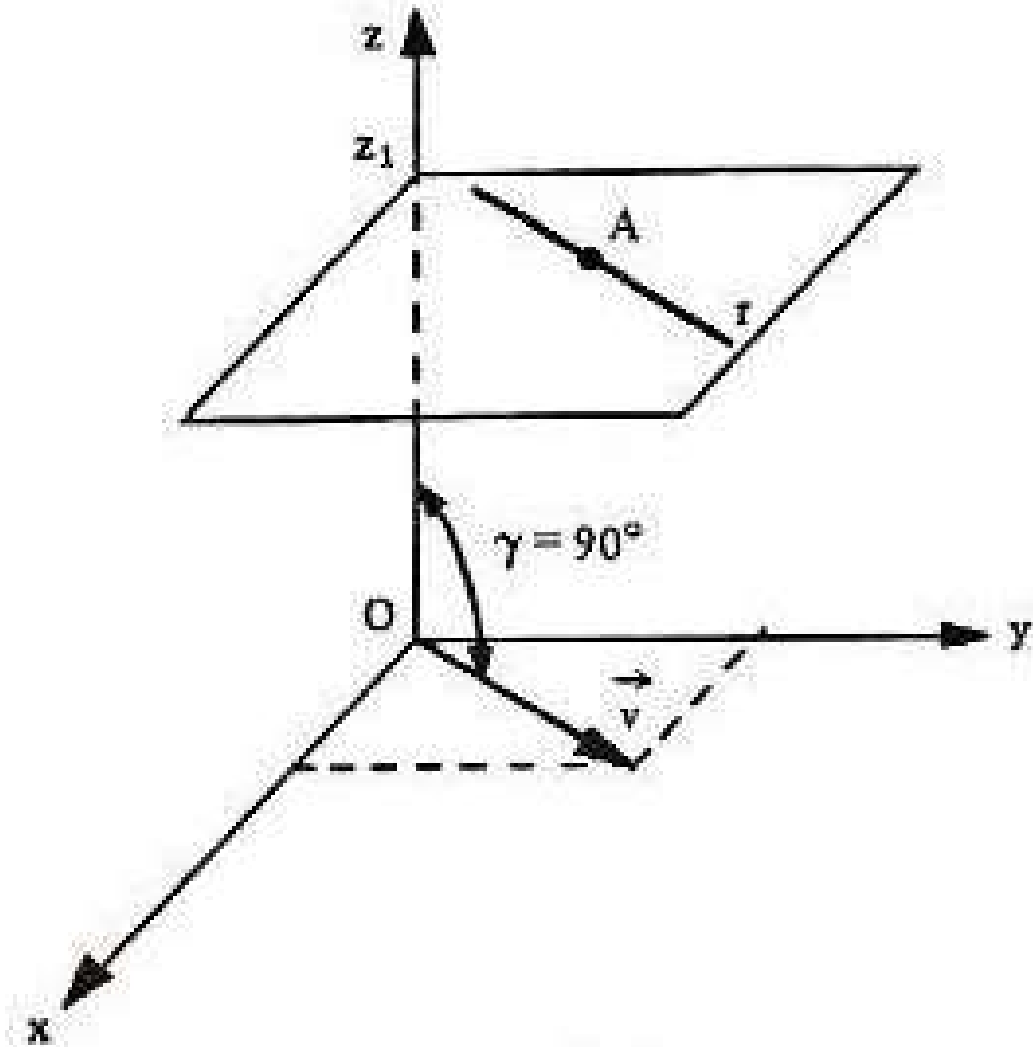
$$\beta = 0, \vec{v} = (\alpha, 0, \gamma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = y_0 \\ \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{z - z_0}{\gamma} \end{array} \right.$$



$$\gamma = 0, \vec{v} = (\alpha, \beta, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = z_0 \\ \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \end{array} \right.$$



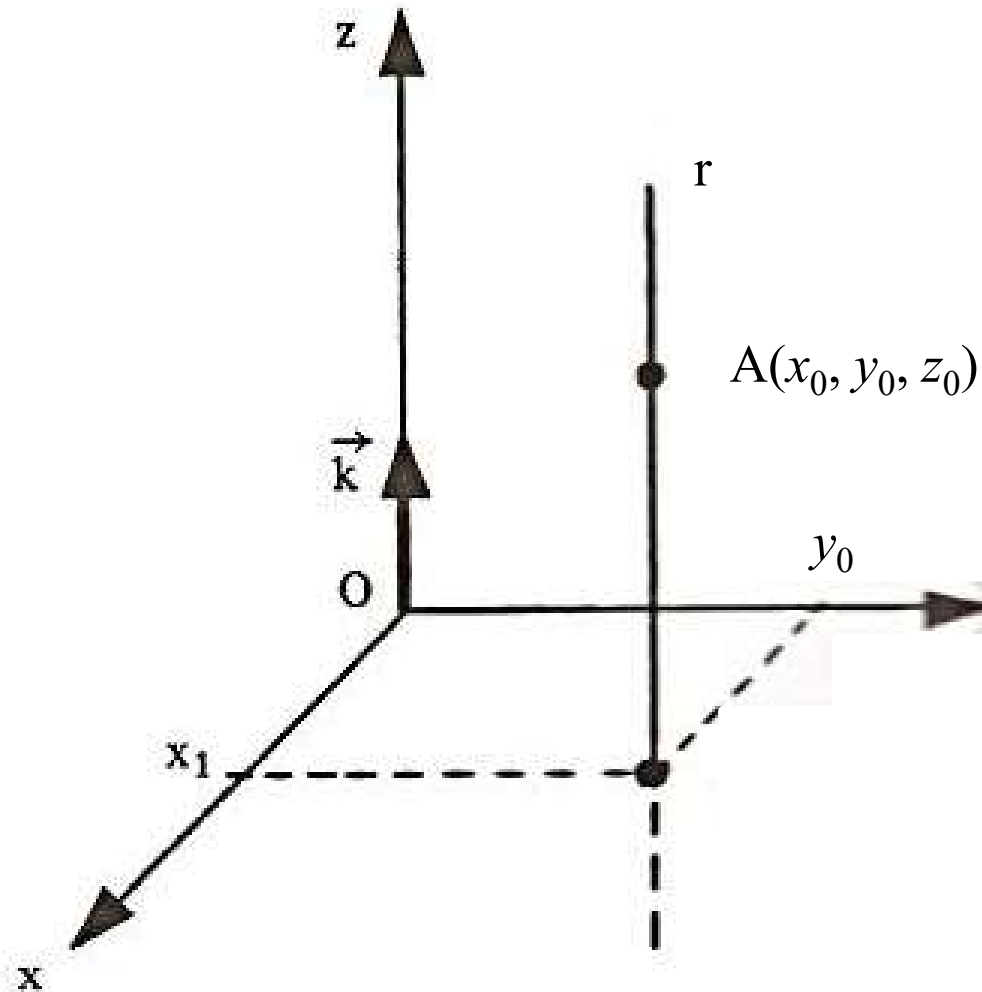
2) Duas das componentes de \vec{v} são nulas.

$$\alpha = \beta = 0, \vec{v} = (0, 0, \delta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{array} \right.$$

ou, simplesmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 \end{array} \right.$$

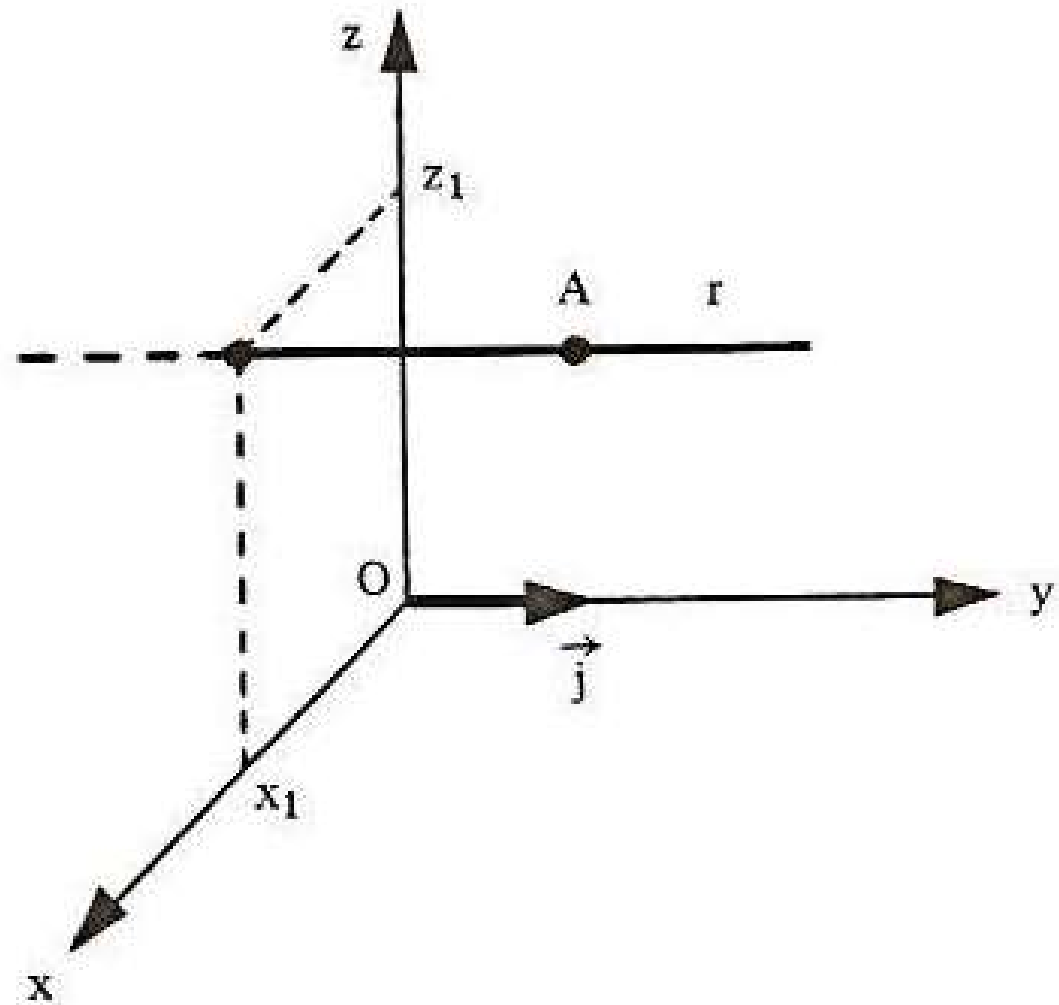


$$\alpha = \gamma = 0, \vec{v} = (0, \beta, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda\gamma \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

ou, simplesmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

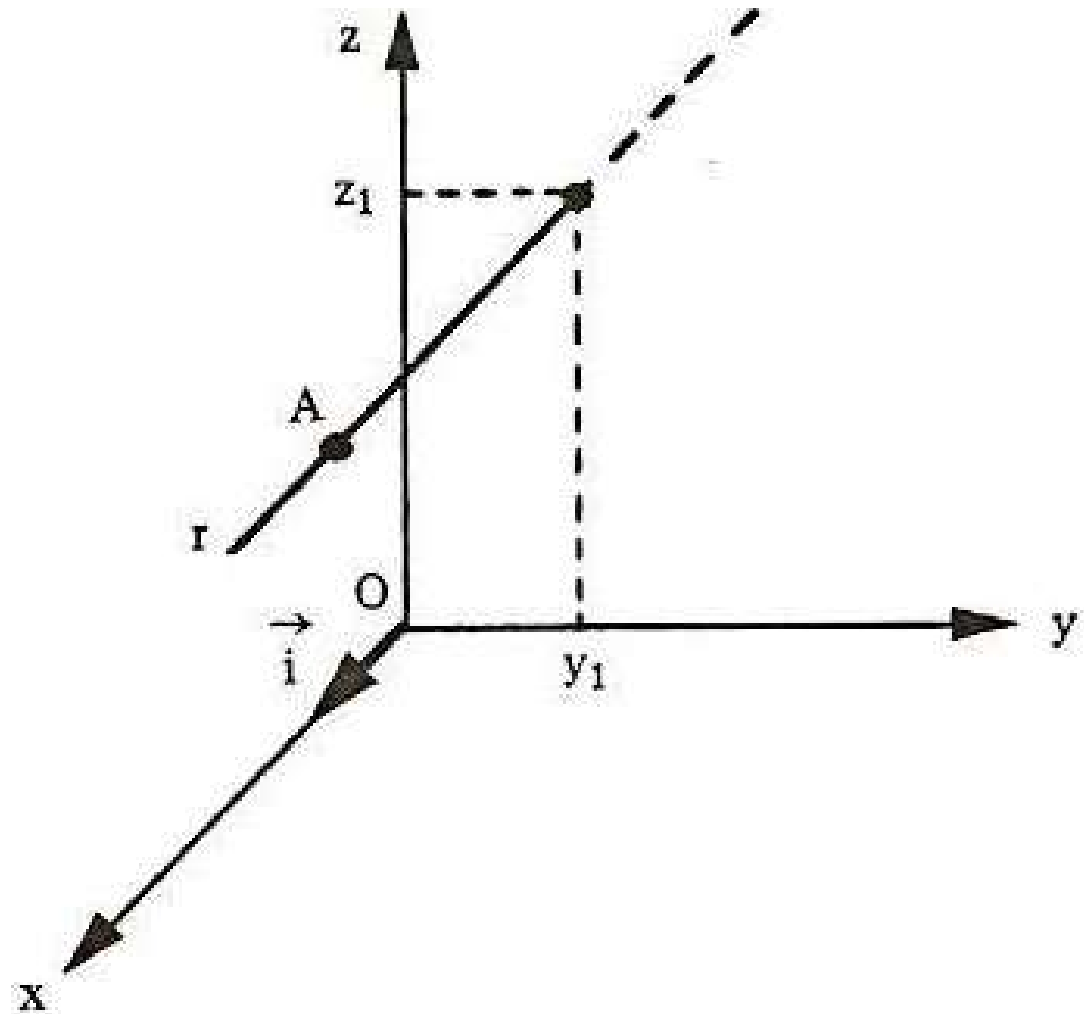


$$\beta = \gamma = 0, \vec{v} = (\alpha, 0, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

ou, simplesmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} y = y_0 \\ z = z_0 \end{array} \right.$$



Observação

Os eixos Ox , Oy e Oz são retas particulares, que passam pela origem $O(0,0,0)$ e têm a direção de seus versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , respectivamente.

As equações do eixo Ox são:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

As equações do eixo Oy são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

As equações do eixo Oz são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Ângulo de duas retas

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o **menor ângulo** de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2 .

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

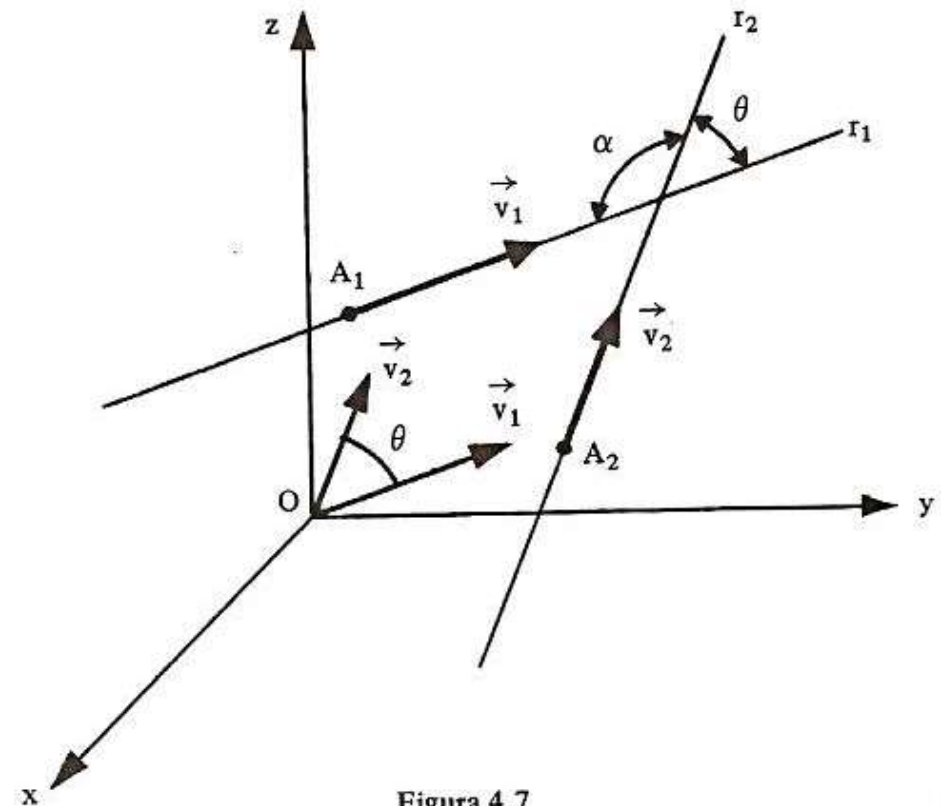


Figura 4.7

Condição de paralelismo de duas retas

A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $\vec{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, que define as direções dessas retas, isto é:

$$\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $\vec{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, que define as direções dessas retas, isto é:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

Exercício

1) Verificar se as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

$$r_1 \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ \frac{x-3}{8} = \frac{z+1}{-6} \end{array} \right.$$

$$r_2 \left\{ \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4} \right.$$

Exercício

2) Calcular o valor de m para as retas r e s sejam ortogonais.

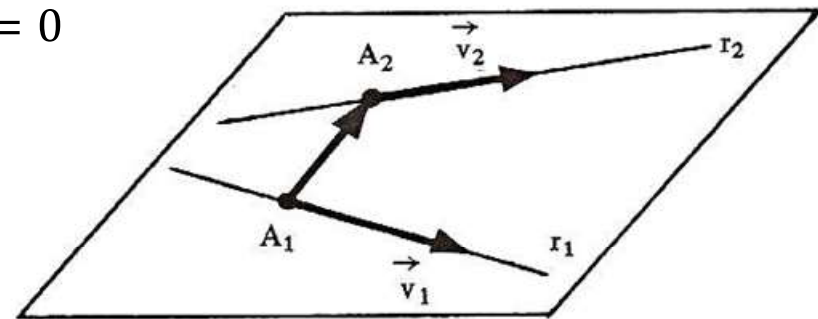
$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{array} \right.$$

$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{array} \right.$$

Condição de coplanaridade de duas retas

A reta r_1 , que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, e a reta r_2 , que passa por um ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, são coplanares se os vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Exercício

1) Determinar se as retas r e s são coplanares.

$$r \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \end{array} \right.$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3} \end{array} \right.$$

Exemplos

2) Determinar o valor de m para que as retas r e s sejam coplanares.

$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx + 2 \\ z = 3x - 1 \end{array} \right.$$

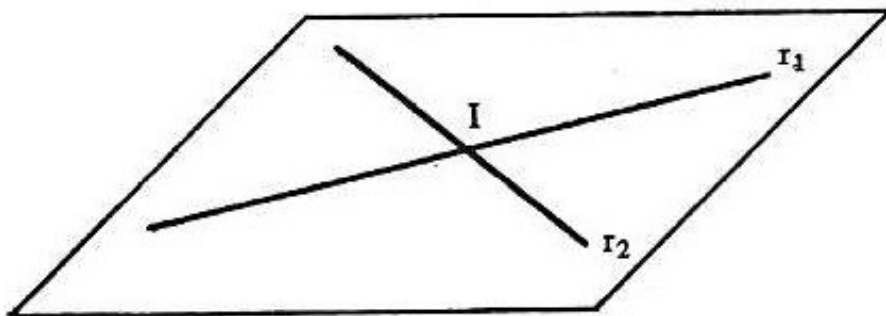
$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{array} \right.$$

Posições relativas de duas retas

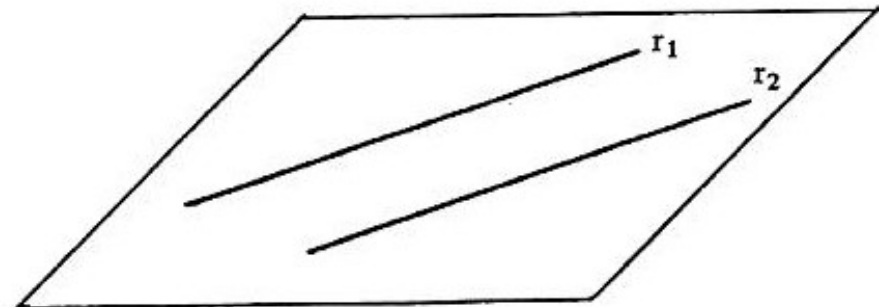
Duas retas r_1 e r_2 , no espaço, podem ser:

Coplanares:

- *Concorrentes*



- *Paralelas*

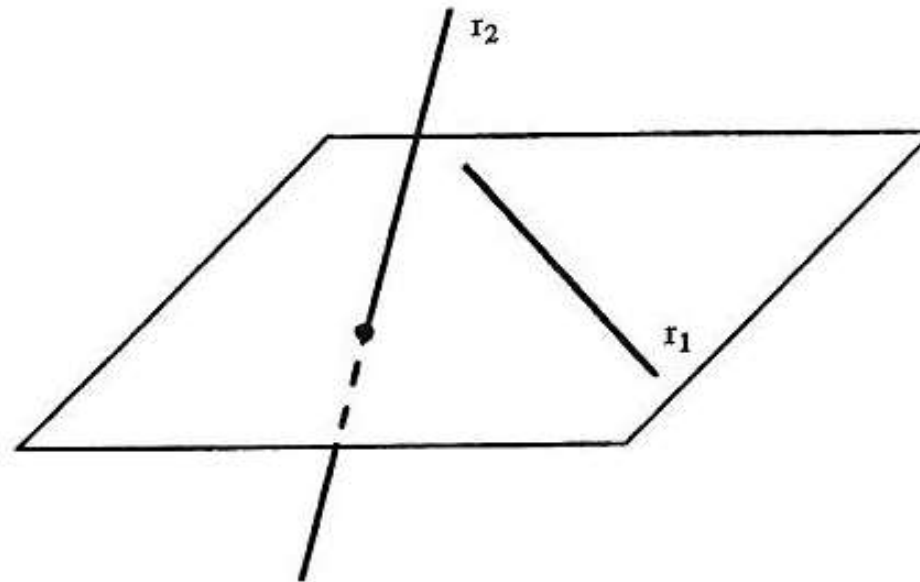


Posições relativas de duas retas

Duas retas r_1 e r_2 , no espaço, podem ser:

Reversas

(não situadas no mesmo plano)



Exercício

1) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{array} \right.$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{array} \right.$$

Exercício

2) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \end{array} \right.$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{array} \right.$$

Exercício

3) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ z = 2x \end{array} \right.$$

$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} x = y = z \end{array} \right.$$

Interseção de duas retas

Duas retas r e s , coplanares e não paralelas, são concorrentes. Considerando as retas abaixo, encontrar sua interseção.

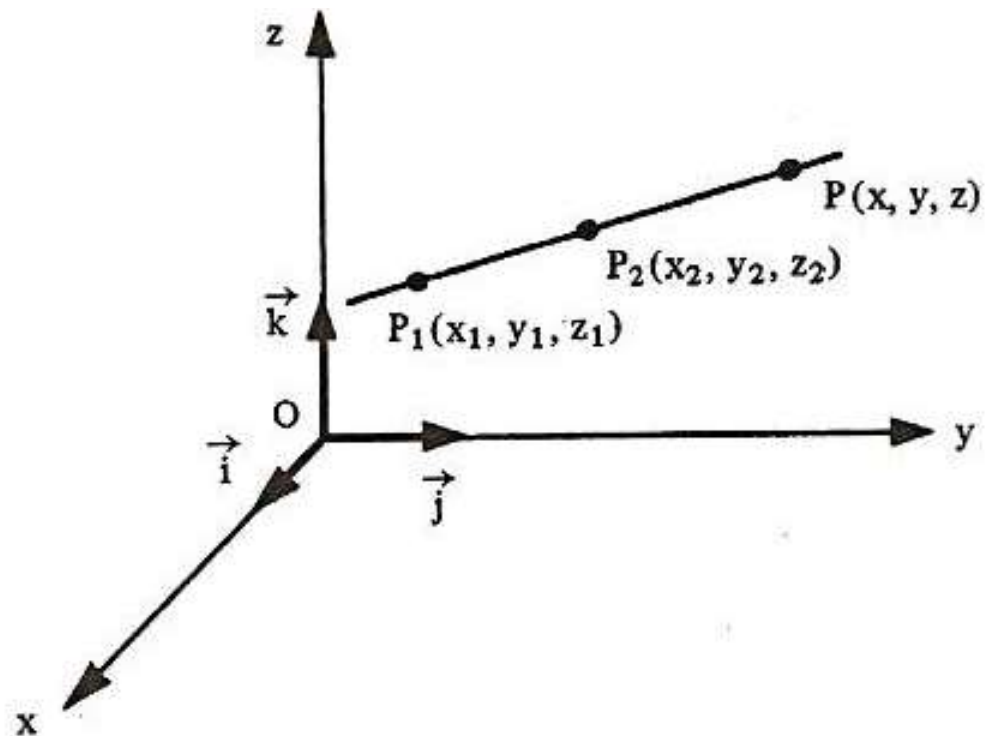
$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{array} \right.$$

$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{array} \right.$$

Ponto que divide um segmento de reta numa razão dada

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, diz-se que um ponto $P(x, y, z)$ divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r se:

$$\overrightarrow{P_1P} = r \overrightarrow{P_2P}$$



Exemplo

Dados os pontos $P_1(2, 4, 1)$ e $P_2(3, 0, 5)$, determinar o ponto $P(x, y, z)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = -1/3$.

Ponto que divide o segmento de reta ao meio

No caso de o ponto P dividir o segmento de reta P_1P_2 ao meio, deve-se ter:

$$\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

