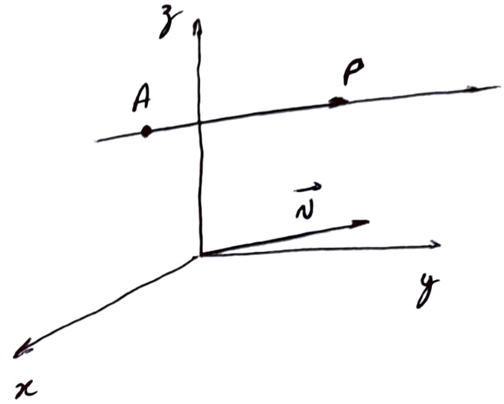
A reta no espaço

Equação vetorial da reta

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t\,(a, b, c)$$



$$\vec{AP} = \lambda\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$\boxed{P = A + t\vec{v}}$$

Equação paramétrica da reta

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Equações simétricas da reta

$$t = \frac{x - x_1}{a}$$

$$t = \frac{y - y_1}{b}$$

$$t = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Equação reduzida da reta

equação simétrica da reta: $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

Isolando as variáveis y e z

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y = (x - x_1)\frac{b}{a} + y_1$$

$$y = \underbrace{\frac{b}{a}}_{m} x \underbrace{- \frac{b}{a} x_1 + y_1}_{n}$$

$$\boxed{y = m x + n}$$

$$\frac{z - z_1}{c} = \frac{x - x_1}{a}$$

$$z = \left(\frac{x - x_1}{a}\right) c + z_1$$

$$z = \underbrace{\frac{c}{a}}_{p} x \underbrace{- \frac{c}{a} x_1 + z_1}_{q}$$

$$\boxed{z = p x + q}$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

1) Verificar se as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

$$r_1 \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4} \end{cases}$$

Vetor diretor:

$$\vec{v_1} = (8, 0, -6)$$

$$\vec{v_2} = (3, 5, 4)$$

Condição de ortogonalidade: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 8.3 + 0.5 + (-6).4)$$

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 24 + 0 - 24$$

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

Logo, as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

2) Calcular o valor de m para que as retas r e s sejam ortogonais.

$$r \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

Vetores diretores:

$$\vec{v}_r = (1, m, -2)$$

$$\vec{v}_s = (2, -1, 5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(1, m, -2) \cdot (2, -1, 5) = 0$$

$$1 \cdot 2 + m(-1) + (-2 \cdot 5) = 0$$

$$2 - m - 10 = 0$$

$$\underline{m = -8}$$

Das equações reduzidas: $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$

$$\frac{x}{1} = \frac{y - n}{m} = \frac{z - q}{p}$$

$\therefore$ vetor diretor da reta $\vec{v} = (1, m, p)$

Condição de coplanaridade de duas retas

1) Determinar se as retas r e s são coplanares.

$$r \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \right.$$

$$s \left\{ \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3} \right.$$

Reta r

$A_r(2, 0, 5)$

$\vec{v}_r = (2, 3, 4)$

Reta s

$A_s(-5, -3, 6)$

$\vec{v}_s = (-1, 1, 3)$

$\overrightarrow{A_rA_s} = A_s - A_r = (-7, -3, 1)$

$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}) = 0$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1+9).2 - (-1+21).3 + (3+7).4$$

$$= +20 - 60 + 40$$

$$= 0$$

Logo, as retas r e s são coplanares.

2) Determinar o valor de m para que as retas r e s sejam coplanares.

$$r \begin{cases} y = mx + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

<u>Reta r</u>

$A(0, 2, -1)$

$\vec{N_r} = (1, m, 3)$

<u>Reta s</u>

$B(0, 1, 0)$

$\vec{N_s} = (1, 2, -2)$

$$\vec{AB} = B - A = (0, -1, 1)$$

$$(\vec{N_r}, \vec{N_s}, \vec{AB}) = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-2).1 - (1+0).m + (-1+0).3 = 0$$

$$= -m - 3 = 0$$

$$\underline{m = -3}$$

Quando $m = -3$, as retas r_1 e r_2 são coplanares.

Posições relativas de duas retas

1º Condição de coplanaridade:

$$(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{A_1A_2}) = 0$$

a) se r_1 e r_2 forem paralelas, temos:

$$\vec{v_1} = m\,\vec{v_2}$$

b) se r_1 e r_2 não forem paralelas elas são concorrentes se $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{A_1A_2}) = 0$

2º Retas reversas: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{A_1A_2}) \neq 0$

Exercício 1: Estudar a posição relativa das retas:

$$r \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$$

Vetores diretores de: $\vec{v_r} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v_s} = (-3, -6, 3)$

São paralelas? $\frac{1}{-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$. Sim

$$\left[\begin{array}{l} A(1, 4, 0) \\ y = 2.1 - 3 \Rightarrow y = -1 \\ z = -1 \ \therefore \end{array}\right.$$

Logo, as retas r e s são retas paralelas e não coincidentes.

Ex 2:

$r \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z \end{cases}$ $\qquad s = \begin{cases} x = 2-4t \\ y = 2t \\ z = -2t+1 \end{cases}$

vetores diretores: $\vec{v_r} = (2, -1, 1)$

$\vec{v_s} = (-4, 2, -2)$

São paralelas? $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{-2}$ Sim

$A(0, 1, 0)$

$0 = 2 - 4t \rightarrow t = 1/2$

$1 = 2t \rightarrow t = 1/2$

$0 = -2t + 1 \rightarrow t = 1/2$

Logo, são paralelas e coincidentes.

Ex 3:

$r \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4} \end{cases}$ $\qquad s = \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 7-2t \end{cases}$

vetores diretores: $\vec{v_r} = (2, 3, 4)$

$\vec{v_s} = (1, -1, -2)$

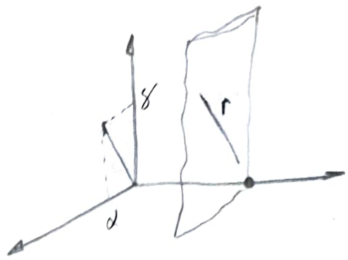
São paralelas? $\dfrac{2}{1} = \dfrac{3}{-1} = \dfrac{4}{-2}$ Não.

São coplanares? $A(2, 0, 5)$ e $B(5, 2, 7) \Rightarrow \vec{AB} = (3, 2, 2)$

$$(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad -1 + (-18) + 8 + 12 - 0 - 0 = 0$$

$\therefore$ Logo, r e s são retas concorrentes.

Ex 4: $r \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ $\quad s \{ x = y = z$



vetores diretores: $\vec{v_r} = (1, 0, 2)$

$\vec{v_s} = (1, 1, 1)$

$\therefore$ paralelas? $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{2}{1}$ $\therefore$ não são paralelas.

coplanares? $A(0,3,0)$ e $B(0,0,0)$

$\vec{AB} = (0, -3, 0)$

$$(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

$\therefore$ não é coplanar

Logo, r e s são retas reversas.

Interseção de duas retas

$r \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$

$I(x, y, z)$ $\quad \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \\ x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \\ y = 1 - 2x \\ z = +2x \end{cases}$

$$z = 3x - 1$$
$$2x = 3x - 1$$
$$-x = -1$$
$$\underline{x = 1}$$

$$y = -3x + 2$$
$$y = -3 \cdot 1 + 2$$
$$\underline{y = -1}$$

$$z = 2x$$
$$z = 2 \cdot 1$$
$$\underline{z = 2}$$

$$\therefore \quad \underline{I(1, -1, 2)}$$

Ponto que divide um segmento de reta numa razão dada

$$\overrightarrow{P_1P} = r\,\overrightarrow{P_2P}$$

$$(x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k} = r(x-x_2)\vec{i} + r(y-y_2)\vec{j} + r(z-z_2)\vec{k}$$

$$x - x_1 = r(x-x_2)$$
$$y - y_1 = r(y-y_2)$$
$$z - z_1 = r(z-z_2)$$

$$x - x_1 = rx - rx_2$$
$$x - rx = -rx_2 + x_1$$
$$x(1-r) = -rx_2 + x_1$$
$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1-r}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - rx_2}{1-r} \\[2ex] y = \dfrac{y_1 - ry_2}{1-r} \\[2ex] z = \dfrac{z_1 - rz_2}{1-r} \end{cases}$$

Onde, (x, y, z) são as coordenadas do ponto P que divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r.

Exemplo: Dados os pontos $P_1(2,4,1)$ e $P_2(3,0,5)$, determinar o ponto $P(x,y,z)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = -1/3$.

1º) Se $r = -1/3$, negativo, significa que o ponto está entre P_1 e P_2.

2º)

$$x = \frac{x_1 - r x_2}{1 - r} = \frac{2 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{y_1 - r y_2}{1 - r} = \frac{4 + 1/3 \cdot 0}{1 + 1/3} = 3$$

$$z = \frac{z_1 - r z_2}{1 - r} = \frac{1 + 1/3 \cdot 5}{1 + 1/3} = 2$$

Logo, o ponto que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = -1/3$ é $P(9/4, 3, 2)$.