

# SISTEMAS DE MEDIDAS

Erros: Características, Tipos e  
propagação

# Características

- Os erros experimentais estão presentes em qualquer tipo de medida que seja efetuada, quer seja na área Biológica, Química, Física e Engenharia.
- O entendimento de suas razões e consequências é de grande importância. Estes erros podem ser classificados em dois grandes grupos:
  - **Erros aleatórios e Erros sistemáticos.**

# Características

- Os **erros aleatórios** são flutuações, para cima ou para baixo, que fazem com que aproximadamente a metade das medidas realizadas de uma mesma grandeza numa mesma situação experimental esteja desviada para mais, e a outra metade esteja desviada para menos.
- O erros aleatórios afetam a precisão das medidas
- E o que é precisão de uma medida?

# Características

- A precisão de uma medida é a relação existente entre um dado valor medido e a média de  $n$  valores em uma mesma condição de medida. A precisão da  $n$ -ésima medida é definida como:

- $$P_n = 1 - \left| \frac{X_n - \bar{X}_n}{X} \right|$$

- Onde  $\bar{X}$  é a média de  $n$  medidas ou seja:

$$P_n = 1 - \left| \frac{X_n - \left( \sum_{n=1}^N \bar{X}_n \right) / n}{\left( \sum_{n=1}^N X_n \right) / n} \right|$$

# Características

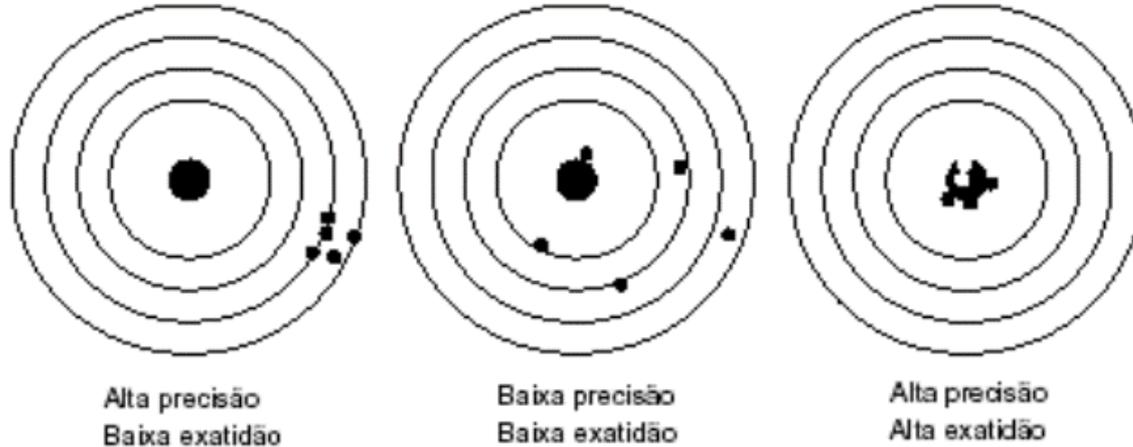
- Os **erros sistemáticos** são causados por fontes identificáveis e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados.
- Erros sistemáticos fazem com que as medidas feitas estejam sempre acima ou sempre abaixo do valor real.
- Erros sistemáticos afetam a exatidão da medida
- E o que é exatidão de uma medida?

# Características

- A exatidão de uma medida é a relação entre o valor considerado verdadeiro e o valor medido.
- Quanto mais próximo for o valor medido  $X_n$  do valor verdadeiro  $Y_n$  maior será a exatidão da medida. A exatidão é, portanto, definida como:

$$A_n = 1 - \left| \frac{Y_n - X_n}{Y_n} \right|$$

# Visualização



## IMPORTANTE!

Uma medida experimental só terá sentido uma vez que seja determinado o erro associado a tal medida.

# Tipos de erros

- Alguns tipos de erro não podem ser excluídos ao se efetuar uma medida, e estes deverão ser levados em conta como sendo a **incerteza** da medida.
- Os componentes da incerteza de medição estão agrupados em duas categorias em função do tipo de avaliação que será efetuada:
  - **incerteza de tipo A e incertezas de tipo B**

# Tipos de erros

- As incertezas de **tipo A** são aquelas estimadas por métodos estatísticos.
- Os cálculos da incerteza de tipo A só podem ser feitos quando se tem uma quantidade de dados suficiente para que seja feita uma análise estatística, calculando a média dos dados e seu desvio-padrão, que mostrará a precisão da medida efetuada
- As incertezas de **tipo B** são estimadas por outros métodos como, por exemplo, o conhecimento das limitações do aparelho que efetua a medida e também a comparação do valor medido experimentalmente com um valor tabelado.

# Tipos de erros

- As incertezas de **tipo B** são estimadas por outros métodos como, por exemplo, o conhecimento das limitações do aparelho que efetua a medida e também a comparação do valor medido experimentalmente com um valor tabelado.
- Quando efetuamos apenas uma medida e desejamos saber a incerteza relacionada a esta medida (incerteza tipo B), precisamos conhecer a precisão do aparelho que efetuará esta medida.

# Tipos de erros

- As medidas podem ser feitas de duas maneiras: de forma direta e de forma Indireta.
- As **medidas diretas** são aquelas em que a leitura da medida é obtida diretamente através do instrumento de medida (ex: medida do tamanho de um objeto por uma trena, medida do tempo de queda livre de um objeto com um cronômetro, etc.)
- As **medidas indiretas** são aquelas em que a leitura observada será transformada através de uma equação na medida desejada (ex: determinação da gravidade  $g$  através do tempo de oscilação de um pêndulo, determinação do calor específico de um corpo através de medidas da temperatura em um calorímetro, etc.)

# Representação e propagação de erros

- Como discutido anteriormente, a realização de uma medida sempre vem com um erro . Por exemplo a medida de velocidade de um carro

$$13.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \pm 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$


# Representação e propagação de erros

Velocidade medida

$v$   
||

erro ou incerteza absoluta na medida da velocidade

$\delta v$   
||

$$13.2 \text{ m/s} \pm 0.2 \text{ m/s}$$

incerteza relativa em  $v$

$$\frac{0.2 \text{ m/s}}{13.2 \text{ m/s}} = 0.0152 = 1.5 \% = \frac{\delta v}{v}$$

# Representação e propagação de erros

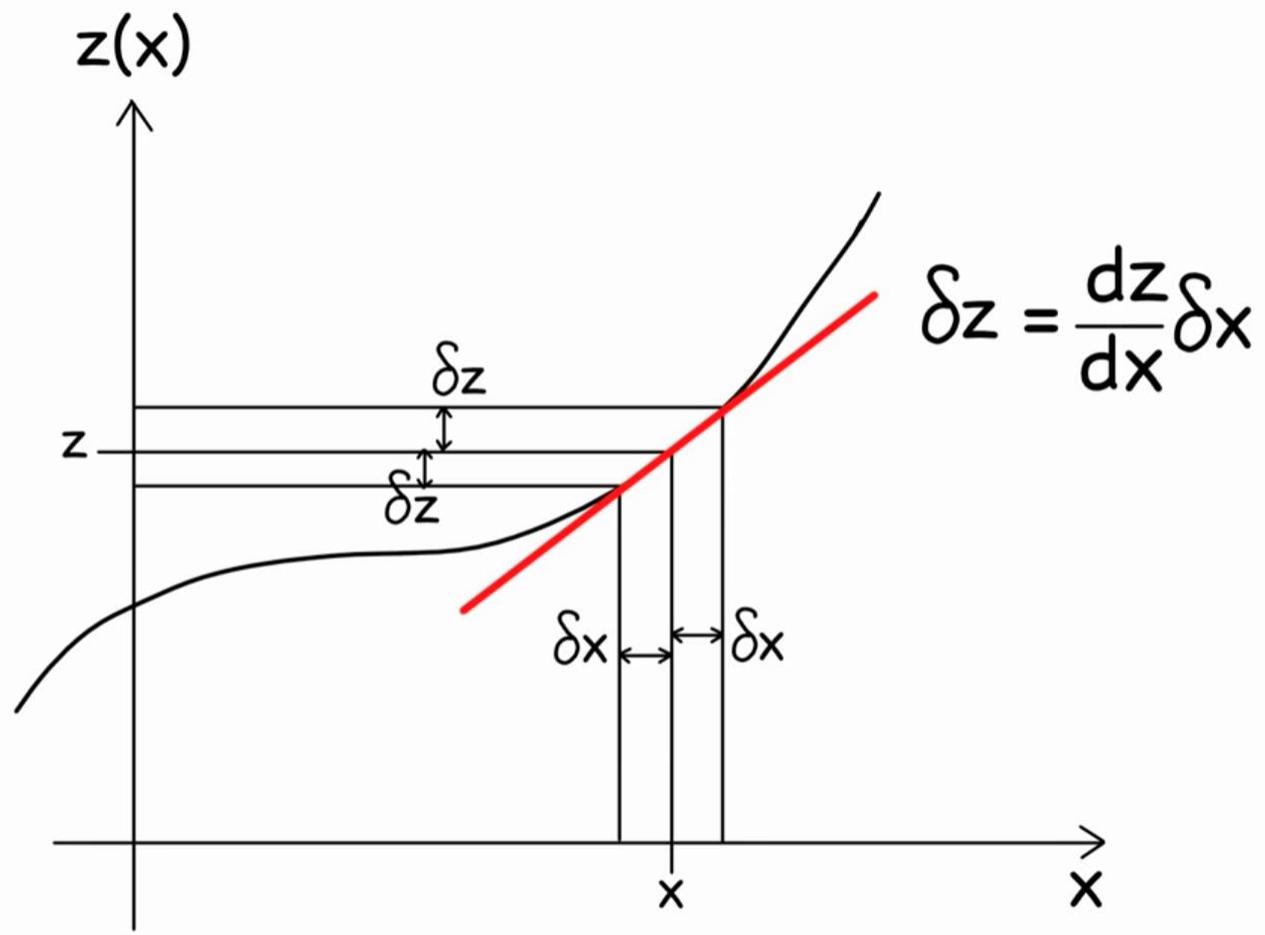
Mais simples de falar

*erro*

Mais descritivo do que parece

*incerteza*

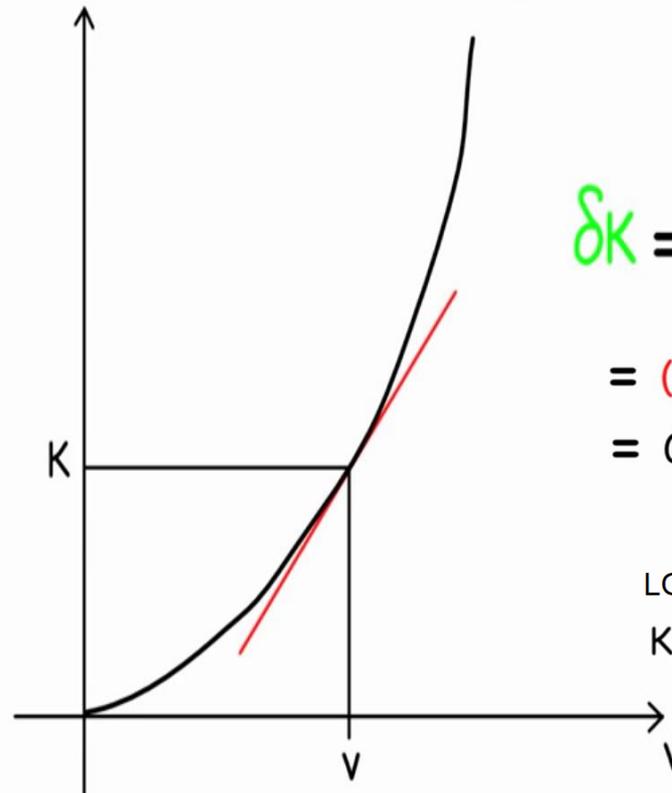
# Representação e propagação de erros



# Representação e propagação de erros exemplo

A medida da velocidade de uma massa de 10 Kg é  $2,34 \pm 0,04$  m/s ache a energia cinética desta massa

$$K(v) = 1/2 m v^2 = 1/2 (10 \text{ kg})(2.34 \text{ m/s})^2 = 27.378 \text{ J}$$



↑  
Energia Cinética  
calculada

$$\begin{aligned} \delta K &= \frac{dK}{dv} \delta v = (mv) \delta v \\ &= (10 \text{ kg})(2.34 \text{ m/s})(0.04 \text{ m/s}) \\ &= 0.94 \text{ J} \end{aligned}$$

← Esta é a quantidade  
para mais ou para  
menos

LOGO :

$$K(v) = 27.378 \text{ J} \pm 0.94 \text{ J}$$

# Representação e propagação de erros

## exemplo

- Agora vamos considerar o erro nas duas variáveis da energia cinética velocidade e massa.

Velocidade

13.2 m/s

erro

+/- 0.02 m/s

Massa

11.6 kg

erro

+/- 0.1 kg

$$K = 1/2 m v^2$$

$$K = z(x,y) = \text{Função de duas variáveis}$$

$$\delta K = ? \quad \text{Como acho o erro?}$$

# Representação e propagação de erros exemplo

- Como a energia agora depende de duas variáveis temos que derivar a função K parcialmente.

Se Z for função de x e y ou seja :  $Z(x,y)$  então o erro em z devido a erros em x e y será :

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \delta y\right)^2}$$

- O erro em Z é então calculado por quadratura.

# Representação e propagação de erros exemplo

- Para lembrar como calcular derivada parcial.

An example:

$$f(x,y,z) = 3xy^2z + \sqrt{y} + x^3/z$$

# Representação e propagação de erros exemplo

- Mas o que é erro por quadratura?

# Representação e propagação de erros

## exemplo

- Logo o erro na energia cinética devido ao erro nas medidas da massa e velocidade será:

$$K(v) = 1/2 m v^2 \quad \delta K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial v} \delta v\right)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial m} =$$

$$\frac{\partial K}{\partial v} =$$

$$\sqrt{\left(1/2 v^2 \delta m\right)^2 + \left(m v \delta v\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1/2 (2.34 \text{ m/s})^2 (0.11 \text{ kg})\right)^2 + \left((10.12 \text{ kg})(2.34 \text{ m/s}) (0.04 \text{ m/s})\right)^2}$$

$$= 0.99 \text{ J}$$

# Exercício exemplo

- Sabendo-se que a potencia de um chuveiro pode ser calculada usando a relação :  $P = I^2R$ , calcule a potencia e o erro propagado por quadratura na potencia cuja resistênciã medida foi de 100 Ohms +/- 2% e a corrente de 8 A +/- 0,2 A.

$$P(I, R) = I^2 \cdot R$$

$$0,2 \text{ A e } 2\Omega$$

$$\sqrt{\frac{\partial P(I, R)^2}{\partial I} + \frac{\partial P(I, R)^2}{\partial R}}$$

$$\sqrt{(2 \cdot I \cdot R \cdot \Delta I)^2 + (I^2 \cdot \Delta R)^2}$$

$$\sqrt{4 \cdot I^2 \cdot \Delta I^2 + I^4 \cdot \Delta R^2}$$

$$I \sqrt{4 \cdot \Delta I^2 + I^2 \cdot \Delta R^2}$$

$$8 \cdot \sqrt{4 \cdot (0,2)^2 + 64 \cdot (2)^2} = 8 \cdot \sqrt{4 \cdot 0,04 + 256}$$

$$64 \cdot 100 = 6400 \pm 128 \text{ W}$$

$$6400 \pm 2\%$$