MPM5607 – Matemática nos currículos da Educação Básica

Profas. Ana Paula Jahn e Iole de Freitas Druck

DAS FRAÇÕES AOS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Frações, como resultado de uma divisão entre números naturais, são também números, capazes de expressar medida de comprimento, área, capacidade ou de outras grandezas, em situações em que a grandeza a ser medida não pode ser expressa por um múltiplo inteiro da unidade de medida considerada. Assim, o estudo de frações, desde o Fundamental I, é um passo importante para a ampliação do conceito de número, inicialmente como um objeto matemático útil para medir grandezas positivas. A introdução dos números racionais estende tal universo numérico pelo acréscimo dos números fracionários negativos.

Mas, desde a Antiguidade, ficou claro para os matemáticos que as frações não são suficientes para medir todas as grandezas, mesmo que positivas. Assim, já na Antiguidade grega ficou comprovado que, por exemplo, o lado de um quadrado é incomensurável com sua diagonal, ou seja, que não existe um segmento, por menor que seja, que possa servir de unidade de medida comum ao lado e à diagonal de um mesmo quadrado de maneira a que ambos sejam múltiplos inteiros dessa unidade. Tal constatação, ao longo da História, acabou por provocar a introdução dos números irracionais e a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

Voltando então à ideia inicial de querer, por exemplo, ter números para expressar a medida de qualquer segmento, foi estabelecida a possibilidade de associar, a cada ponto de uma reta, um número real – criando-se a noção de coordenadas de pontos em uma reta orientada com um ponto definido como origem (eixo), utilizado amplamente no estudo dos gráficos de funções e nas curvas da Geometria Analítica. Assim, sendo x_1 e x_2 as coordenadas respectivas das extremidades A e B do segmento $\overline{AB}$ sobre um eixo, dizemos que a medida do segmento sempre existe e é expressa pelo número real positivo $|x_1 - x_2|$.

Passaremos a discutir em detalhes as noções de números racionais e de números irracionais, a partir dos conhecimentos sobre frações e sobre o sistema decimal de numeração, supostos trabalhados anteriormente.

<u>Problematização</u>

1) Usando o algoritmo da divisão, pode-se determinar a representação decimal de qualquer fração. Como exemplo, sabemos que $\frac{3}{4}$ = 0,75 e que $\frac{1}{3}$ = 0,333... , que se convenciona escrever $0,\overline{3}$, colocando-se uma barra sobre o período da dízima, para eliminar possíveis ambiguidades.

Pergunta-se:

a) Em que casos essa representação pode ser finita e em que casos ela será infinita? Sendo infinita, será sempre periódica, ou não? Por quê?

b) É única a representação decimal de todas as frações?

2) Entre $0,\overline{3}$ e 0,334 quantas frações podemos interpolar (ou seja, maiores do que $0,\overline{3}$ e menores do que 0, 334)? Dê exemplo de pelo menos dois números escritos em representação decimal não periódica, mas com infinitas casas decimais depois da vírgula, também entre $0,\overline{3}$ e 0,334. Quantos números decimais existem nessa última condição?

3) Onde está o erro?

$$S = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \ldots$$

$$S - 1 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \ldots\right)$$

$$S - 1 = \frac{4}{3}S$$

$$S - \frac{4}{3}S = 1$$

$$-\frac{1}{3}S = 1$$

Portanto S = -3

4) Está certo ou não o que usualmente fazem os livros didáticos para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica?

5) Os alunos costumam achar que $0,\overline{9} < 1$. Como você faria para que eles de fato compreendam que $0,\overline{9} = 1$?

<u>Definições e propriedades</u>:

Def.1: Um número a é chamado de <u>racional</u> se (e só se) existem p e q inteiros, com $q \neq 0$, tais que $a = \frac{p}{q}$. Em símbolos escreve-se: **Q** = $\left\{\frac{p}{p}\middle|p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\right\}$.

6) É possível generalizar a questão discutida no item **2)** pela formulação de uma propriedade geral que fale sobre a quantidade de números racionais ou de números escritos em representação decimal não periódica, mas com infinitas casas decimais depois da vírgula entre dois números racionais quaisquer? Se não, justifique. Se sim, escreva o enunciado de tal propriedade e demonstre-a.

Proposição A: Um número a é racional se e só se sua representação decimal for finita ou infinita periódica.

Demonstração: faça!

Como discutido anteriormente, em um eixo, entre os pontos de coordenadas $0,\overline{3}$ e 0,334 existem números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Portanto tais números são não racionais, pela proposição 1.

Def.2: Vamos chamar as coordenadas dos pontos de um eixo ordenado de números <u>reais</u>. O conjunto de todos os números reais é denotado por |**R.**

Def.3: Chamamos de números <u>irracionais</u> a todo número real que não for racional.