14. Dada a função $f(x) = ax + b$, mostre que $df = \Delta f$ qualquer que seja x e qualquer que seja Δx.

15. Usando o fato de que $\Delta f \cong df$, calcule, aproximadamente:
   a) $e^{1,1}$.
   b) O acréscimo sofrido pela área de um quadrado de lado x, quando x varia de 3 para 3,01.

16. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 2x^2 + 5x + 8$. Atualmente o nível de produção é de 25 unidades. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, quanto varia o custo se forem produzidas 25,5 unidades.

17. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$. Atualmente o nível de produção é de 10 unidades e o produtor deseja aumentá-la para 10,2 unidades. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, de quanto varia o custo.

18. A função receita de uma empresa é $R(x) = 200x - 2x^2$, em que x é o número de unidades produzidas. Atualmente o nível de produção é de 40 unidades, e a empresa pretende reduzir a produção em 0,6 unidade. Usando diferencial de função, dê aproximadamente a variação correspondente da receita.

19. Uma empresa produz mensalmente uma quantidade de um produto dada pela função de produção $P(x) = 2.000x^{\frac{1}{2}}$, em que x é a quantidade de trabalho envolvida (medida em homens-hora). Atualmente são utilizados 900 homens-hora por mês. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, qual o acréscimo na quantidade produzida quando se passa a utilizar 950 homens-hora.

20. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$. Calcule, usando diferencial de função, qual o custo aproximado de fabricação da 21ª unidade.

5.10 Funções Marginais

Em Economia e Administração, dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. Chama-se função marginal de $f(x)$ à função derivada de $f(x)$. Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante. Veremos a seguir algumas funções marginais e a sua interpretação.

Custo Marginal

Seja $C(x)$ a função custo de produção de x unidades de um produto. Chamamos de custo marginal à derivada de $C(x)$. Indicamos o custo marginal por $C_{mg}(x)$.

Exemplo 5.21. Consideremos a função custo $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$.

O custo marginal é dado por $C_{mg}(x) = C'(x) = 0{,}03x^2 - x + 300$.

Se quisermos o custo marginal para $x = 10$, teremos

$$C_{mg}(10) = 0{,}03 \cdot (10)^2 - 10 + 300 = 293.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$C_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

tem-se que

$$C_{mg}(x) \cong \frac{\Delta C}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Freqüentemente esse Δx pequeno é suposto como igual a 1. Assim,

$$C_{mg}(x) \cong \Delta C = C(x + 1) - C(x).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de ùma unidade adicional a partir de x unidades.

No exemplo dado, $C_{mg}(10) = 293$ representa, aproximadamente, $C(11) - C(10)$, ou seja, o custo de produção da 11ª unidade.

Receita Marginal

Seja $R(x)$ a função receita de vendas de x unidades de um produto. Chamamos de receita marginal a derivada de $R(x)$ em relação a x. Indicamos a receita marginal por $R_{mg}(x)$. Assim,

$$R_{mg}(x) = R'(x).$$

Exemplo 5.22. Dada a função receita $R(x) = -2x^2 + 1.000x$, a receita marginal é

$$R_{mg}(x) = -4x + 1.000.$$

Se quisermos a receita marginal no ponto $x = 50$, teremos

$$R_{mg}(50) = -4 \cdot (50) + 1.000 = 800.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$R_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x},$$

tem-se que

$$R_{mg}(x) \cong \frac{\Delta R}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Supondo $\Delta x = 1$, vem:

$$R_{mg}(x) \cong \Delta R = R(x + 1) - R(x).$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x unidades.

No exemplo dado, $R_{mg}(50) = 800$ representa aproximadamente $R(51) - R(50)$, ou seja, o aumento da receita decorrente da venda da 51ª unidade.

Exercícios

21. Dada a função custo $C(x) = 50x + 10.000$, obtenha o custo marginal e interprete o resultado.

22. Dada a função custo $C(x) = 0,3x^3 - 2,5x^2 + 20x + 200$, obtenha:
   a) o custo marginal C_{mg};
   b) $C_{mg}(5)$ e a interpretação do resultado;
   c) $C_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado.

23. Repita o exercício anterior para a seguinte função custo: $C(x) = 0,1x^2 + 5x + 200$.

24. Dada a função receita $R(x) = 100x$, obtenha a receita marginal e interprete o resultado.

25. Dada a função receita $R(x) = -4x^2 + 500x$, obtenha:
   a) a receita marginal R_{mg};
   b) $R_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado;
   c) $R_{mg}(20)$ e a interpretação do resultado.

26. Se a função de demanda for $p = 20 - 2x$, obtenha a receita marginal.

27. Repita o exercício anterior com a seguinte função de demanda: $p = \dfrac{500}{x + 30} - 10$.

28. Se $p = a - bx$ for a função de demanda, obtenha a receita e a receita marginal.

29. Em cada caso, obtenha o custo marginal e esboce os respectivos gráficos:
   a) $C(x) = 2x + 100$
   b) $C(x) = x + 200$
   c) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 30x + 100$
   d) $C(x) = 3x^3 - 5x^2 + 20x + 100$

30. Em cada caso, obtenha a receita marginal e a receita média e esboce os respectivos gráficos:
   a) $R(x) = 10x$
   b) $R(x) = 6x$
   c) $R(x) = -2x^2 + 600x$
   d) $R(x) = -10x^2 + 1.000x$

   Observação: a receita média R_{me} é dada por $R_{me}(x) = \dfrac{R(x)}{x}$.

Propensão Marginal a Consumir e a Poupar

Chamando de y a renda disponível e, C o consumo, vimos que C é função de y, e a função $C(y)$ é chamada de função consumo. Denomina-se propensão marginal a consumir (e indica-se por p_{mg}^{C}) a derivada de C em relação a y. Isto é:

$$p_{mg}^{C} = C'(y).$$

Analogamente, vimos que a poupança S é também função de y, e que a função $S(y)$ é chamada de função poupança. Denomina-se propensão marginal a poupar (e indica-se por p_{mg}^{S}) a derivada de S em relação a y, ou seja:

$$p_{mg}^{S}(y) = S'(y).$$

Exemplo 5.23. Supondo que a função consumo de uma família seja $C(y) = 20 + 0{,}4y^{0,75}$ teremos

$$p^C_{mg}(y) = 0{,}3\, y^{-0,25}.$$

Se quisermos o valor dessa propensão para $y = 16$, teremos

$$p^C_{mg}(16) = 0{,}3 \cdot (16)^{-0,25} = 0{,}3 \cdot (2^4)^{-0,25} = 0{,}15.$$

A interpretação é análoga à feita para o custo e a receita marginal, ou seja, aumentando-se em uma unidade a renda disponível (de 16 para 17), o aumento do consumo será aproximadamente igual a 0,15.

Como vimos, a função poupança é dada por $S = y - C$, ou seja,

$$S(y) = y - 20 - 0{,}4y^{0,75}.$$

Assim, a propensão marginal a poupar é:

$$p^S_{mg}(y) = 1 - 0{,}3 \cdot y^{-0,25}.$$

Se quisermos o valor dessa propensão para $y = 16$, teremos:

$$p^S_{mg}(16) = 1 - 0{,}3 \cdot (16)^{-0,25} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Portanto, se a renda passar de 16 para 17, o aumento da poupança será aproximadamente 0,85.

Produtividade Marginal

Consideremos uma função de produção P que dependa da quantidade x de um fator variável. Chama-se produtividade marginal do fator à derivada de P em relação a x.

Exemplo 5.24. Consideremos a função de produção $P(x) = 50x^{0,5}$, em que P é a quantidade (em toneladas) produzida por mês de um produto, e x, o trabalho mensal envolvido (medido em homens-hora).

A produtividade marginal do trabalho é

$$P'(x) = 25 \cdot x^{-0,5}.$$

Se $x = 10.000$, então

$$P'(10.000) = 25 \cdot (10.000)^{-0,5} = 25 \cdot (10^4)^{-0,5} = 25 \cdot (10^{-2}) = 0{,}25.$$

Assim, se o número de homens-hora passar de 10.000 para 10.001, o aumento na produção mensal será, aproximadamente, 0,25 tonelada.

Exercícios

31. Dada a função consumo $C = 500 + 0{,}7y$, obtenha:
   a) a propensão marginal a consumir e interprete o resultado;
   b) a propensão marginal a poupar e interprete o resultado.

32. Dada a função consumo $C = 30 + 0{,}4y^{0,5}$, obtenha:
   a) a propensão marginal a consumir p^C_{mg};
   b) $p^C_{mg}(64)$ e interprete o resultado;
   c) $p^S_{mg}(64)$ e interprete o resultado.

33. Repita o exercício anterior com a seguinte função consumo: $C = 50 + 0{,}6 \cdot y^{0,5}$.

34. Dada a função de produção $P = 500x^{0,5}$, em que x é o número de homens-hora empregados por mês e P, o número de litros produzidos de um produto mensalmente, pede-se:
   a) a produtividade marginal do trabalho para $x = 6.400$ e a interpretação do resultado;
   b) a produtividade marginal do trabalho para $x = 8.100$ e a interpretação do resultado.

35. A produção anual de algodão (em toneladas) de um agricultor é função da quantidade x de fertilizante empregada (em toneladas), segundo a relação $P = 100 + 200x - x^2$.
   a) Determine a produtividade marginal do fertilizante para $x = 50$ e interprete o resultado.
   b) Determine a produtividade marginal do fertilizante para $x = 75$ e interprete o resultado.

36. Considere a função de produção $P(L) = 500\sqrt{L} - 6L$, em que P é a produção mensal (em toneladas), e L, o número de homens-hora empregados.
   a) Calcule $P'(L)$.
   b) Calcule $P'(1)$, $P'(4)$, $P'(9)$, $P'(25)$ e $P'(100)$.

Elasticidades

A função de demanda relaciona o preço unitário p com a quantidade demandada x. Um indicador da sensibilidade de variação da demanda em relação ao preço poderia ser a derivada de x em relação a p. Todavia, essa derivada depende das unidades de medida utilizadas. Assim, se a queda de $ 1,00 por kg de abóbora fizesse o consumidor aumentar em 1 kg por mês o consumo desse produto, a relação consumo/preço seria 1 se o consumo fosse medido em quilogramas, mas seria 1.000 se o consumo fosse medido em gramas. Em razão disso, costuma-se definir um indicador de sensibilidade que independa das unidades de medida utilizadas. Tal indicador é chamado elasticidade, e passaremos a defini-lo.

Suponhamos que a um preço p_0 a quantidade demandada seja x_0. Suponhamos, ainda, que o preço sofra uma variação Δp a partir de p_0 e, como conseqüência, a quantidade demandada sofra uma variação Δx, a partir de x_0.

Consideremos:

- A variação porcentual no preço: $\dfrac{\Delta p}{p_0}$.

- A variação porcentual na quantidade: $\frac{\Delta x}{x_0}$.

Chamamos de elasticidade da demanda no ponto (x_0, p_0) o número:

$$e = \left| \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x_0}}{\frac{\Delta p}{p_0}} \right| = \frac{p_0}{x_0} \left| \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} \right|.$$

O limite dentro do módulo é $\frac{dx}{dp}$ (derivada da quantidade em relação ao preço). O módulo é introduzido na definição para que a elasticidade resulte num número positivo, uma vez que em geral, $\frac{dx}{dp} < 0$. Observemos que alguns autores preferem fazer a definição sem o uso do módulo.

Assim,

$$e = \frac{p_0}{x_0} \cdot \left| \frac{dx}{dp} \right|,$$

em que a derivada $\frac{dx}{dp}$ é calculada no ponto (x_0, p_0).

É importante salientar que a elasticidade é uma característica do ponto da curva de demanda e não da curva em si.

Exemplo 5.25. Se a equação de demanda for dada por $x = 500 - 10p$, teremos:

$$\frac{dx}{dp} = -10.$$

Portanto:

$$e = \frac{p_0}{x_0} \cdot 10.$$

Assim, se $p_0 = 40$, então $x_0 = 500 - 400 = 100$ e

$$e = \frac{40}{100} \cdot 10 = 4.$$

Isso significa que, para Δp pequeno, $4 \cong \left| \frac{\frac{\Delta x}{100}}{\frac{\Delta p}{40}} \right|$.

Admitindo $\frac{\Delta p}{40} = 1\%$ (como é usual), teremos

$$\frac{\Delta x}{100} \cong -4\% \text{ (pois } \Delta x \text{ e } \Delta p \text{ têm sinais contrários).}$$

Em outras palavras, se o preço for 40 e sofrer um aumento porcentual de 1%, a queda porcentual na demanda será de aproximadamente 4%.

De modo análogo, se admitíssemos um aumento porcentual no preço de 2% (a partir de 40), a queda porcentual na demanda seria de aproximadamente 8%.

Se $e > 1$, a demanda é dita elástica no ponto considerado. Se $0 < e < 1$, a demanda é dita inelástica, e se $e = 1$, a demanda tem elasticidade unitária no ponto considerado.

Para a função de oferta, define-se elasticidade da oferta em relação ao preço de modo análogo:

$$f = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{x_0}}{\dfrac{\Delta p}{p_0}} = \frac{p_0}{x_0} \cdot \frac{dx}{dp},$$

em que $\dfrac{dx}{dp}$ é calculada no ponto $x = x_0$ e $p = p_0$ da equação de oferta.

Nesse caso, o módulo foi omitido, pois $\dfrac{dx}{dp} > 0$.

Exemplo 5.26. Se a equação de oferta for $x = 64 + p^2$, então $\dfrac{dx}{dp} = 2p$.

Se quisermos a elasticidade para $p_0 = 6$, então $x_0 = 64 + 6^2 = 100$ e $\dfrac{dx}{dp} = 12$, no ponto em que $p_0 = 6$.

Assim,

$$f = \frac{6}{100} \cdot 12 = 0{,}72.$$

Desse modo, para um acréscimo porcentual de 1% no preço (a partir de 6), o acréscimo porcentual na quantidade ofertada (a partir de 100) será de aproximadamente 0,72%.

Exercícios

37. Se a equação de demanda for dada por $x = \dfrac{10-p}{5}$, obtenha a elasticidade da demanda para $p = 5$ e interprete o resultado.
38. Resolva o exercício anterior para $p = 3$.
39. Obtenha a elasticidade da oferta para $p = 9$, sabendo que a equação da oferta é dada por $x = 20 - 0{,}05p + p^{\frac{1}{2}}$. Interprete o resultado.
40. Resolva o exercício anterior para $p = 16$.
41. Considere a função de demanda dada por $p = \sqrt{200 - x}$. Obtenha a elasticidade da demanda para $x = 100$ e interprete o resultado.