$p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

6. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau n é um número ímpar. Mostre que existem números reais x_1, x_2 tais que $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

7. Mostre que se n é um número par então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.

8. Tomando $x_0 = 3$, use a relação de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

para calcular $\sqrt{5}$ com três algarismos decimais exatos. (Por exemplo: sabemos que 1,414 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com três algarismos decimais exatos porque $1,414^2 < 2 < 1,415^2$.)

9. Usando o método de Newton, estabeleça um processo iterativo para calcular $\sqrt[3]{a}$ e aplique-o a fim de obter um valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$.

Capítulo 8

Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. Introdução

Vimos no Capítulo 5 que se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim então o acréscimo $f(x+h) - f(x)$, sofrido por f quando se passa de x para $x+h$, depende apenas do acréscimo h dado a x mas não depende do próprio valor de x. Isto é óbvio, uma vez que $f(x) = ax + b$ implica $f(x+h) - f(x) = ah$. O mais importante, tendo em vista as aplicações, é que quando f é monótona crescente, ou decrescente, vale a recíproca: se $f(x+h) - f(x)$ não depende de x então f é afim.

O Exemplo 8 do Capítulo 5 dizia respeito a uma quantia x, investida durante um prazo fixo e determinado, gerando no final desse período o valor $f(x)$. Constatou-se alí que $f(x)$ é uma função linear de x.

Neste capítulo, consideraremos uma quantia c_0, aplicada a juros fixos, capitalizados continuamente. Se chamarmos de $c(t)$ o capital gerado a partir daquela quantia inicial depois de decorrido o tempo t, é claro que $c(t)$ é uma função crescente de t.

Notamos ainda que se $t < t'$ então o acréscimo $c(t'+h) - c(t')$, experimentado pelo capital após o decurso de tempo h, a partir do momento t', é maior do que o rendimento $c(t+h) - c(t)$ depois de decorrido o mesmo tempo h, a partir do momento anterior t, pois o capital acumulado $c(t')$, sendo maior do que $c(t)$, deve produzir maior renda.

Assim, $c(t)$ não é uma função afim de t, já que $c(t+h) -$

$c(t)$ depende não apenas de h mas de t também. Esta conclusão negativa indica que se deve buscar outro instrumento matemático, diferente da função afim, para modelar a presente situação.

Analisando este problema mais detidamente, vemos que a diferença $c(t+h) - c(t)$ pode ser considerada como o lucro obtido quando se investiu a quantia $c(t)$ durante o prazo h. Portanto, como vimos acima, $c(t+h) - c(t)$ deve ser proporcional à quantia aplicada $c(t)$, ou seja, $c(t+h) - c(t) = \varphi \cdot c(t)$, onde o fator de proporcionalidade $\varphi = \varphi(h)$ depende evidentemente do prazo h. A afirmação de que $\varphi(h) = [c(t+h) - c(t)]/c(t)$ não depende de t é a expressão matemática do fato de que os juros são fixos. Como $[c(t+h) - c(t)]/c(t) = [c(t+h)/c(t)] - 1$, esta afirmação equivale a dizer que o quociente $c(t+h)/c(t)$ não depende de t.

Portanto, quando os juros são fixos, se $c(t_1+h)/c(t_1) = 2$, por exemplo, então $c(t_2+h)/c(t_2) = 2$ para qualquer t_2 (e o mesmo h). Isto quer dizer que o tempo h necessário para que um capital seja dobrado é o mesmo em todas as ocasiões e para qualquer valor desse capital, pequeno ou grande.

Vemos então que o modelo matemático conveniente para descrever a variação de um capital aplicado a juros fixos, em função do tempo, deve ser uma função crescente $c(t)$ tal que o acréscimo relativo $[c(t+h) - c(t)]/c(t)$ dependa apenas de h mas não de t.

Conforme será estabelecido neste capítulo, as únicas funções com estas propriedades são as da forma $c(t) = c_0 \cdot a^t$.

Uma situação análoga ocorre quando se estuda a desintegração radioativa. Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio e o urânio, por exemplo) tendem a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se noutra substância. As partículas emitidas não alteram consideravelmente a massa total do corpo mas, com o passar do tempo, a quantidade da substância original diminui (aumentando, conseqüentemente, a massa da nova substância transformada). Isto ocorre de tal modo que, em cada instante, a quantidade de matéria que se está desintegrando naquele momento é proporcional à massa da substância original que ainda resta.

Assim sendo, se chamarmos (como fazem os cientistas) de *meia-vida* de uma substância radioativa o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância, constatamos que a meia-vida é um número intrinsecamente associado a cada substância radioativa: o tempo necessário para reduzir à metade a radioatividade de uma tonelada de urânio é igual ao tempo que leva um grama da mesma substância para ter sua metade desintegrada.

A propósito: os vários isótopos do urânio têm meia-vida da ordem de 10^9 anos. Enquanto isso, a meia-vida do rádio 224 é de 3 dias e 15 horas.

De um modo geral, se designarmos por $m = m(t)$ a massa da substância radioativa presente no corpo no instante t, veremos que m é uma função decrescente de t e, além disso, a perda relativa $[m(t+h) - m(t)]/m(t)$, ocorrida após o decurso do tempo h, depende apenas de h mas não do instante inicial t, ou seja, da massa $m(t)$ existente naquela ocasião.

Outra vez constatamos a necessidade de uma função real de variável real $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que seja monótona (desta vez, decrescente) e tal que a variação relativa $[m(t+h) - m(t)]/m(t)$ dependa apenas de h. Ou, equivalentemente, que a razão $m(t+h)/m(t)$ não dependa de t mas somente de h.

Mostraremos neste capítulo que as únicas funções com essas propriedades são as do tipo $m(t) = b \cdot a^t$ (com $0 < a < 1$). Os exemplos que acabamos de mencionar ilustram algumas das inúmeras situações em que ocorrem as funções do tipo exponencial, que estudaremos agora.

Começaremos nosso estudo com uma revisão das potências com expoente racional.

2. Potências de Expoente Racional

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a

a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição.

A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m+n$ fatores iguais a a. Segue-se que, para $m_1, m_2, \ldots, m_k$ quaisquer, vale

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_k}.$$

Em particular, se $m_1 = \cdots = m_k = m$, vem $(a^m)^k = a^{mk}$.

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots.$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$$

como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto a seqüência cujo n-ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta seqüência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Existem seqüências crescentes que são limitadas superiormente. Um exemplo disso é

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

onde se tem

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entretanto, *se $a > 1$, a seqüência formada pelas potências a^n, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente: nenhum número real c, por maior que seja, pode ser superior a todas as potências a^n.* Noutras palavras, dado arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$, pode-se sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$.

Para provar isto, escrevemos $a = 1 + d$, $c > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $a^n > 1 + nd$. Logo, se tomarmos $n > (c-1)/d$, teremos $1 + nd > c$ e, com maior razão, $a^n > c$.

Exemplo. Seja $a = 1,000001$ (um inteiro e um milionésimo). As potências sucessivas $a, a^2, a^3, \ldots$, a princípio próximas de 1, podem tornar-se tão grandes quanto se deseje, desde que o expoente seja tomado suficientemente grande. Se usarmos o argumento acima para obter uma potência de a que seja superior a 1 bilhão, devemos tomar um expoente da ordem de 10^{14}. Na realidade, usando uma calculadora, vemos que para ter $(1,000001)^n >$ um bilhão basta tomar $n > 21$ milhões. É que, ao demonstrarmos que as potências sucessivas de um número maior do que 1 crescem acima de qualquer limite prefixado, nos preocupamos mais em usar um raciocínio simples e claro do que obter o menor expoente possível.

Para exprimir que a seqüência crescente (a^n) é ilimitada superiormente, escrevemos $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ e dizemos que a^n tende ao infinito quando n cresce indefinidamente (supondo $a > 1$!).

De modo análogo, se $0 < a < 1$ então as potências sucessivas $a, a^2, a^3, \ldots$ decrescem abaixo de qualquer cota positiva: fixado arbitrariamente um número $c > 0$, por menor que seja, pode-se sempre achar um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < c$.

Com efeito, sendo $0 < a < 1$, se escrevermos $b = 1/a$, teremos $b > 1$. Logo, pelo que acabamos de ver, podemos achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > 1/c$, ou seja, $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$, donde $a^n < c$.

Este resultado significa que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ quando $0 < a < 1$. (A expressão $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ lê-se "o limite de a^n, quando n tende ao infinito, é igual a zero".)

Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro, que pode ser negativo ou zero. Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Em primeiro lugar, qual deve ser o valor de a^0?

Como a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0 \cdot a = a$, logo a única definição possível é $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \quad \text{logo} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Assim, se quisermos estender o conceito de potência do número real $a > 0$, para admitir expoentes inteiros quaisquer e preservar a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, a única definição possível consiste em pôr $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m+n) = f(m) \cdot f(n),$$

é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Segue-se, em particular que, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e, para $0 < a < 1$, tem-se $a^n < 1 < a^{-n}$ pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

De $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, vejamos que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), de modo que continue válida a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Depois de dar esta definição, há alguns detalhes que devem ser examinados. Em primeiro lugar, como se tem $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso mostrar que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ a fim de que a definição não seja ambígua. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$. E finalmente, cumpre provar que a função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Esses pormenores estão tratados no Capítulo 2 do livro "Logaritmos", da Coleção do Professor de Matemática.

A função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva. Noutras palavras, fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Isto fica evidente se observarmos que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o mesmo deve ocorrer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, porém $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. De um modo mais elementar, este fato pode ser ilustrado mediante um exemplo. Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$, ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m se escreve como 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \mapsto 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte em $\mathbb{R}^+$, desde que seja $a \neq 1$. Este é o conteúdo do lema abaixo. A demonstração do mesmo, embora elementar, é um tanto técnica e pode ser omitida numa primeira leitura.

Lema: *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração: Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n .$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad \text{e} \quad 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo

$$\frac{m}{n} \leqslant M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, \quad a^{1/n}, \quad a^{2/n} \quad , \dots , \quad a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

3. A Função Exponencial

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A *função exponencial de base* a, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2) $a^1 = a$;
3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e
   $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

É interessante observar que se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula.

Mais ainda: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante da propriedade 1), tanto faz dizer que o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^+$. A vantagem de tomar $\mathbb{R}^+$ como contra-domínio é que se terá f sobrejetiva, como veremos.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades 1) e 2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta daí, como mostramos na seção anterior, que, para todo número racional $r = m/n$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar as idéias, suporemos $a > 1$. Então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a^r < a^x < a^s.$$

Ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, \; r, s \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a^r < A < B < a^s$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema da seção anterior.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades 1), 2) e 3) acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda

4) *A função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *definida por* $f(x) = a^x$, *é ilimitada superiormente.*

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o Lema da seção anterior.

Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

5) *A função exponencial é contínua.*

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, sabemos que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

6) *A função exponencial* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, *é sobrejetiva.*

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a.) Para prová-la, usamos o Lema da seção anterior e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$ portanto $\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$. Para fixar as idéias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$.

Assim, (r_n) é uma seqüência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$, como queríamos demonstrar.

Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

(A injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre da sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então

$$x > y \Rightarrow a^x > a^y$$

e

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y,$$

portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.)

Tem-se ainda

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad a > 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad 0 < a < 1.$$

A figura exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$

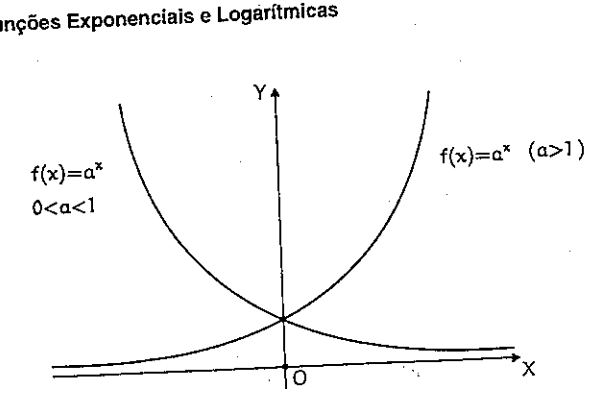


Figura 55

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquando x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grande de x, a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Se compararmos o gráfico de $y = 2^x$ (por exemplo) com o de $y = x^{10}$, veremos que, para $0 < x < 1,077$ temos $x^{10} < 2^x$. Para $1,077 < x < 58,77$ tem-se $x^{10} > 2^x$ e, para todo $x > 58,77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$.

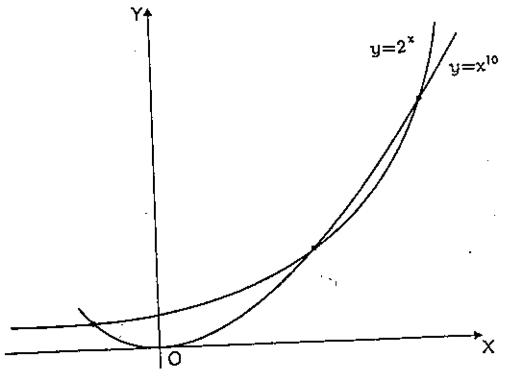


Figura 56

4. Caracterização da Função Exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais.

Uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. As dúvidas que possam surgir acontecem geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Nos Capítulos 5 e 6, vimos propriedades que caracterizam as funções afins e quadráticas. Vamos agora fazer o mesmo com as funções exponenciais.

Teorema: (Caracterização da função exponencial.) *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que (1) $\Rightarrow$ (2) suponhamos, a fim de fixar as idéias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente.) Então, pelo Lema da seção 2, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2). As implicações restantes, (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) são óbvias.

Observação. O Teorema de caracterização pode ser enunciado de um modo ligeiramente diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo (1) $\Rightarrow$ (2) muda apenas no caso x irracional. Então tem-se $x = \lim_{n\to\infty} r_n = r_n$, $r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$ g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema: (Caracterização das funções de tipo exponencial.) *Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f continua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.

5. Funções Exponenciais e Progressões

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

Esta simples observação é usada na prática para "discretizar" a análise das situações, como aquelas da seção 1, em que se tem crescimento ou decrescimento exponencial.

Por exemplo, se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tirarmos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, \ldots$ teremos $c(0) = c_0$, $c(h) = c_0 A$, $c(2h) = c_0 \cdot A^2$, $c(3h) = c_0 \cdot A^3, \ldots$ onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica:

$$c_0, c_0 \cdot A, c_0 \cdot A^2, c_0 \cdot A^3, \ldots.$$

(Vide "Progressões e Matemática Financeira", Coleção do Professor de Matemática, SBM)

Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial, conforme o

Teorema: *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *numa progressão geométrica* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_n = f(x_n)$. *Se pusermos* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$ *teremos* $f(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a seqüência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A seqüência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Função Inversa

Diz-se que a função $g: Y \to X$ é a *inversa* da função $f: X \to Y$ quando

se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Quando g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por sua vez, a igualdade $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f: X \to Y$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Reciprocamente, se $f: X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g: Y \to X$. Para definir g, notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Pomos então $g(y) = x$. Assim, $g: Y \to X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para $x \in X$ e $y \in Y$ quaisquer.

Exemplo. Lembremos que $[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$. Sejam $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ e $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Tem-se $f(g(y)) = y$ para todo $y \geqslant 0$ mas $g(f(x))$ só é igual a x quando $x \geqslant 0$. Se $x \in \mathbb{R}$ for negativo então $g(f(x)) = -x$. Portanto g não é inversa de f. Na realidade, nenhuma função $\varphi: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pode ser inversa de f porque f não é injetiva. Note, porém, que se considerarmos a restrição de f a $[0, +\infty)$, isto é, a função $F: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $F(x) = x^2$, então F é uma correspondência biunívoca, e sua inversa é a função $G: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $G(y) = \sqrt{y}$, pois

$$G(F(x)) = G(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

e

$$F(G(y)) = F(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

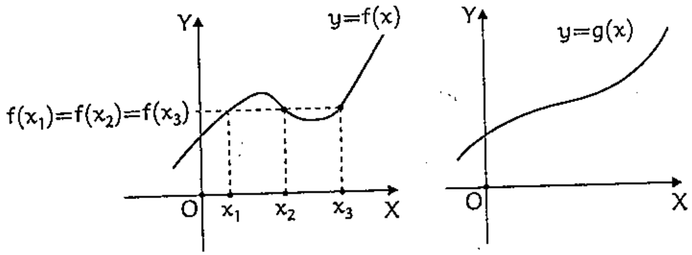
para quaisquer $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Mais geralmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $x \mapsto x^n$ é uma correspondência biunívoca de $[0, +\infty)$ sobre si mesmo, cuja inversa é $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.

Se n é ímpar, então $x \mapsto x^n$ é uma correspondência biunívoca de $\mathbb{R}$ sobre si mesmo, cuja inversa $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $G(y) = \sqrt[n]{y}$.

Quando $g: Y \to X$ é a função inversa de $f: X \to Y$, escreve-se $g = f^{-1}$.

Prova-se que uma função contínua $f: I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, só pode ser injetiva se for monótona (crescente ou decrescente).



g injetiva (monótona)

Figura 57

Portanto, a fim de que uma função contínua $f: I \to J$ (I, J intervalos) possua uma inversa, é necessário que f seja crescente, ou decrescente, além de sobrejetiva.

A inversa de uma função crescente é crescente e a inversa de uma função decrescente é decrescente.

Antes de falar sobre o gráfico da função inversa, revejamos a noção de simetria em relação a uma reta.

Dois pontos P, Q no plano dizem-se *simétricos* em relação a uma reta r nesse plano quando r é a mediatriz do segmento PQ. Duas figuras dizem-se simétricas em relação à reta r quando cada ponto de uma delas é o simétrico de um ponto da outra em relação a essa reta.

Chama-se *diagonal* do plano $\mathbb{R}^2$ a reta Δ formada pelos pontos (x, x) que têm abcissa e ordenada iguais.

O simétrico do ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à diagonal Δ é o ponto $Q = (y, x)$. Com efeito, o segmento PQ é uma diagonal do quadrado cujos vértices são (x, y), (x, x), (y, x) e (y, y), enquanto Δ é o prolongamento da outra diagonal.

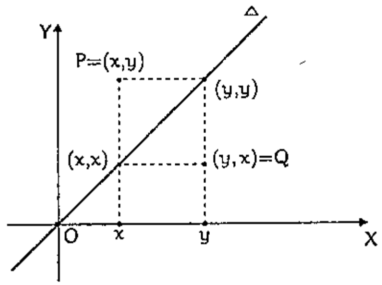


Figura 58

Se X, Y são conjuntos de números reais e $f^{-1}: Y \to X$ é a inversa da função $f: X \to Y$ então o gráfico G' da função f^{-1} é o simétrico do gráfico G da função f em relação à diagonal $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.

Com efeito, temos

$$(x, y) \in G \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in G'.$$

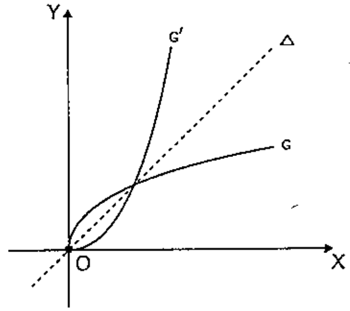


Figura 59

Se, numa folha de papel translúcido, traçarmos o gráfico de uma função f então, girando a folha num ângulo de 180° em torno da diagonal Δ obtemos o gráfico de f^{-1}.

Observação. Se $f: X \to Y$ é sobrejetiva e $g: Y \to X$ é tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então tem-se necessariamente $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ e $g = f^{-1}$ é a inversa de x. Com efeito, dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, logo

$$f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y.$$

7. Funções Logarítmicas

Vimos na seção 5 que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Segue-se que f possui uma função inversa.

A inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o *logaritmo* de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$

então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$

ou seja

$$\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo.

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações.

Essa importância é permanente; jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado. (Vide RPM 18, pág. 24 e o livro "Logaritmos", já citado.)

A função $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos. (Para uma discussão sobre logaritmos de números negativos, ver "Meu Professor de Matemática", página 180.)

As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos *decimais*), base 2 (logaritmos *binários*) e base e (logaritmos *naturais*, às vezes impropriamente chamados *neperianos*). Estes últimos são os mais adequados cientificamente, e voltaremos a eles logo mais.

Como $\log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$, e como $\log_a 1 = 0$, segue-se que, para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se $0 < a < 1$ então $\log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A figura mostra os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

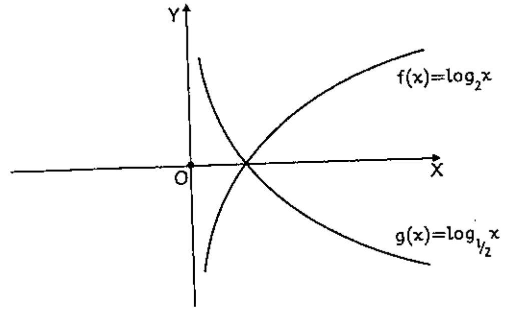


Figura 60

Se tivéssemos traçado os gráficos das funções $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, as figuras obtidas teriam o mesmo aspecto acima. Mais precisamente, existiriam constantes positivas c, d tais que $\log_a x = c \cdot \log_2 x$ e $\log_b x = d \cdot \log_{1/2} x$ para todo $x > 0$.

Com efeito se $u = \log_a x$ e $v = \log_2 x$ então $a^u = x$ e $2^v = x$. Portanto, se escrevermos $c = \log_a 2$ teremos $a^c = 2$, logo

$$x = a^u = 2^v = (a^c)^v = a^{cv}$$

portanto $u = cv$, isto é, $\log_a x = c \cdot \log_2 x$ para todo $x > 0$, onde a constante c é igual a $\log_a 2$. A igualdade

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

é válida em geral (mesmo raciocínio) e se chama a *fórmula de mudança de base* para logaritmos. Quando a e b são ambos maiores ou ambos menores do que 1 então $\log_a b > 0$. Se um dos números a, b é maior e o outro é menor do que 1 então $\log_a b < 0$. A fórmula acima diz que duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante.

Como $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetiva, segue-se que $y = \log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. Mais precisamente, tem-se, para $a > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty.$$

A primeira destas igualdades significa que se pode dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente grande. A segunda quer dizer que, dado arbitrariamente $A > 0$, tem-se $\log_a x < -A$ desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

Ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente, $\log_a x$ tende a $+\infty$ muito lentamente quando $x \to +\infty$. Com efeito, dado um número $M > 0$, tem-se $\log_a x > M \Leftrightarrow x > a^M$. Assim, por exemplo, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que mil, será preciso tomar um número x cuja expressão decimal tenha pelo menos mil e um algarismos.

Esse crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$, que, como sabemos, são simétricos em relação à diagonal de $\mathbb{R}^2$.

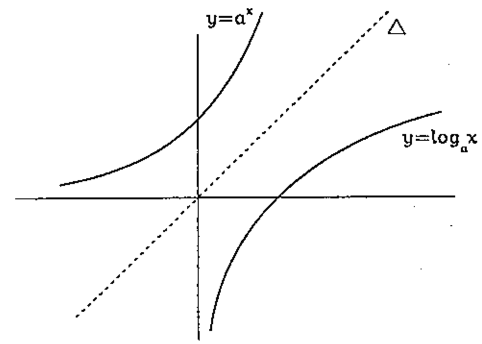


Figura 61

8. Caracterização das Funções Logarítmicas

Provaremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas. Antes lembremos que se $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$, de acordo com a Observação no final da seção 6, pois $x \mapsto a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$. (Estamos supondo $a > 0$ diferente de 1.)

Teorema: (Caracterização das funções logarítmicas.) *Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Para fixar as idéias, admitamos f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \\ &= f(a) + f(a) + \cdots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 = m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = f(1) &= f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \end{aligned}$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

e daí $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente: $g(x) = \log_a x$.

9. Logaritmos Naturais

Nesta seção, mostraremos como os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o Teorema de Caracterização demonstrado na seção anterior.

Começamos pelo estudo de uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para os nossos propósitos.

Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação (= função) $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$, obtido de (x, y) multiplicando a abcissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e seu transformado $X' = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

O leitor interessado numa análise mais detida do fato de que F e F' têm a mesma área observará que todo polígono retangular contido em F é transformado por T num polígono retangular de mesma área contido em F' enquanto T^{-1} faz o mesmo com os polígonos retangulares contido em F'. [Vide "Medida e Forma em Geometria", especialmente as pags. 22 e 49.]

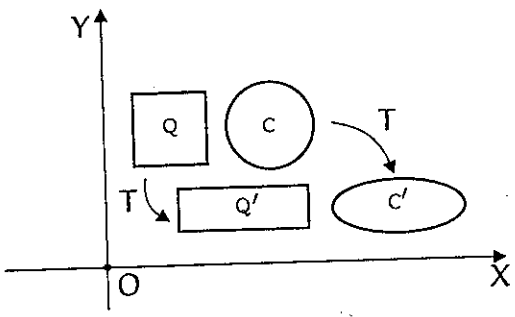


Figura 62: Um quadrado, um círculo e suas imagens por $T(x, y) = (2x, y/2)$

Interessa-nos em particular o efeito da transformação T nas faixas de hipérbole.

Seja

$$H = \{(x, 1/x); x > 0\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$; H é o gráfico da função $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que x está entre a e b e $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ chama-se uma *faixa de hipérbole*. H_a^b é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais $x = a$, $x = b$, ao sul pelo eixo das abcissas e ao norte pela hipérbole H.

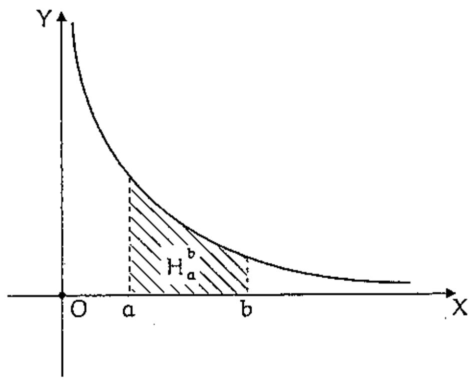


Figura 63

A transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_b^b na faixa H_{ak}^{bk}.

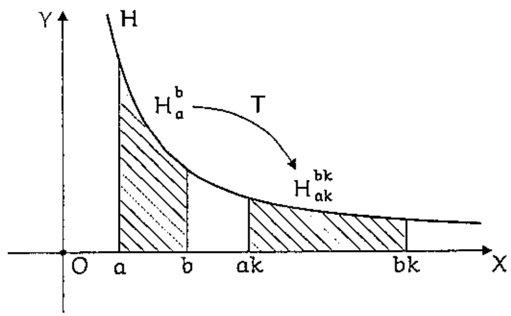


Figura 64

Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, providas de sinal $+$ ou $-$. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando

$a = b$.

Para deixar mais clara esta convenção, escreveremos

$$\text{ÁREA } H_a^b,$$

com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores $\geqslant 0$, será escrita como área H_a^b. Assim, temos

$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{área } H_a^b > 0 \text{ se } a < b;$$
$$\text{ÁREA } H_a^b = -\text{área } H_a^b < 0 \text{ se } b < a;$$
$$\text{ÁREA } H_a^a = 0.$$

É óbvio que, quando $a < b < c$, tem-se

$$\text{área } H_a^b + \text{ área } H_b^c = \text{ área } H_a^c.$$

Uma conseqüência da adoção de áreas orientadas é que se tem

$$\text{ÁREA } H_a^b = -\text{ÁREA } H_b^a.$$

Daí segue que vale a igualdade

$$\text{ÁREA } H_a^b + \text{ ÁREA } H_b^c = \text{ ÁREA } H_a^c$$

em qualquer dois seis casos $a \leqslant b \leqslant c$, $a \leqslant c \leqslant b$, $b \leqslant a \leqslant c$, $b \leqslant c \leqslant a$, $c \leqslant a \leqslant b$ e $c \leqslant b \leqslant a$. A igualdade acima é fácil de provar. Basta ter a paciência de considerar separadamente cada uma destas seis possibilidades.

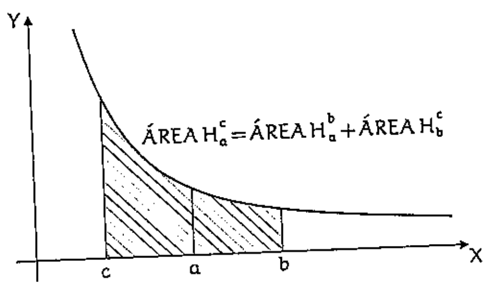


Figura 65

Definamos uma função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$.

$$f(x) = \text{ÁREA } H_1^x$$

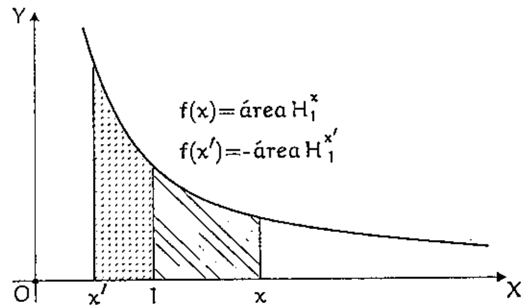


Figura 66

$\ell n\, x =$ área da região hachurada
$\ell n\, x' =$ - área da região pontilhada

Resultam imediatamente da definição as seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1;$$
$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1;$$
$$f(1) = 0;$$
f é crescente.

Além disso, observamos que, para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer:

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ ÁREA } H_1^x + \text{ ÁREA } H_x^{xy}.$$

Mas, como vimos acima, ÁREA $H_x^{xy} =$ ÁREA H_1^y. Logo $f(xy) =$ ÁREA $H_1^x +$ ÁREA H_1^y, ou seja:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Pelo Teorema de Caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que

$$f(x) = \log_e x \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Escreveremos $\ell n\, x$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número $\ell n\, x$ de *logaritmo natural* de x

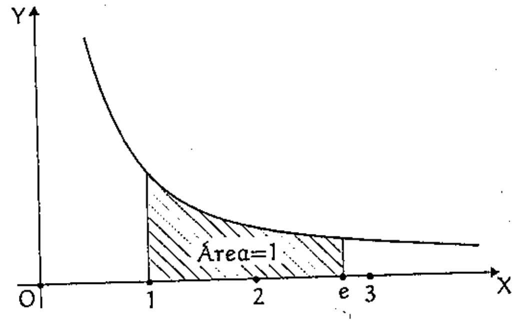


Figura 67

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja ÁREA $H_1^e = 1$.

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2,718281828459$.

Os logaritmos naturais, de base e, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal.

Alguns autores chamam o logaritmo natural de "logaritmo neperiano", em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural.

Usualmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Noutras palavras, costuma-se introduzir e como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

$n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n. Mostraremos agora que o número e, que acabamos de caracterizar pela propriedade ÁREA $H_1^e = 1$, é mesmo o valor daquele limite.

O argumento que usaremos para dar essa prova se baseia na figura abaixo, copiada da capa do livro "Logaritmos", já citado antes.

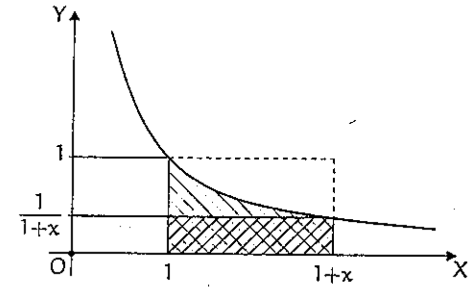


Figura 68

Nela temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ell n(1+x) < x.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ell n(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n+1} < \ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

portanto:

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ tende a e. Segue-se então destas últimas desigualdades que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Este argumento ilustra bem claramente a vantagem que advém de se interpretar o logaritmo natural geometricamente: a noção de área é visualmente intuitiva, permititndo que se obtenham desigualdades como a que foi usada aqui.

A igualdade $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ foi obtida a partir da desigualdade

$$(*) \qquad \frac{1}{1+x} < \frac{\ell n(1+x)}{x} < 1,$$

válida para todo $x > 0$. Se considerarmos $-1 < x < 0$, teremos $-x > 0$ e $1 + x > 0$. Portanto é válido ainda falar de $\ell n(1+x)$. Observamos que o retângulo cuja base mede $-x$ e cuja altura mede 1 está contido na faixa H_{1+x}^1 e esta, por sua vez, está contida no retângulo de mesma base e altura $1/(1+x)$. Comparando as áreas destas figuras, vem

$$-x < -\ell n(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Dividindo os 3 membros pelo número positivo $-x$ obtemos

$$(**) \qquad 1 < \frac{\ell n(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}.$$

As desigualdades (*) e (**) nos dão

$$\frac{1}{1+x} < \ell n(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \ell n(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x},$$

ou seja

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \quad \text{ou} \quad e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{1+x}},$$

conforme seja $x > 0$ ou $-1 < x < 0$. Em qualquer hipótese, daí se segue que

$$(***) \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Isto significa que é possível tornar o valor da expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tão próximo de e quanto se deseje, desde que se torne o número não-nulo x suficientemente pequeno em valor absoluto. (O próprio x pode ser > 0 ou < 0.)

A igualdade (***) se exprime dizendo que $(1+x)^{1/x}$ tende a e quando x tende a zero.

Tomando, por exemplo, $x = \frac{\alpha}{n}$, vemos que $\frac{1}{x} = \frac{n}{\alpha}$ e que $x \to 0$ se, e somente se $n \to \infty$. Logo (***) nos dá

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^\alpha = e^\alpha.$$

Como caso particular da igualdade

$$e^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

válida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

10. A Função Exponencial de Base e

O número e, base dos logaritmos naturais, foi definido na seção anterior como o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^e é igual a 1. Em seguida, mostramos que esse número é também o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Nesta seção, daremos exemplo de uma situação da vida real que leva à consideração do limite acima.

Por sua vez, a função exponencial $x \mapsto e^x$, de base e, pode ser definida por meio do limite $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ou então, geometricamente, pelo fato de que $y = e^x$ é o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^y é igual a x. Mostraremos que as funções de tipo exponencial, $f(x) = b\,e^{\alpha x}$, com base e, surgem em questões naturais e calcularemos a taxa de variação instantânea dessas funções.

Um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos, por simplicidade, $\alpha = k/100$, por cada real aplicado o investidor receberá, no final de um ano, $1 + \alpha$ reais, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1+\alpha)$ reais. O acréscimo $c_0 \cdot \alpha$ (juro) é uma espécie de aluguel do dinheiro.

Sendo assim, raciocina o investidor, se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro (aluguel) anual, logo receberei $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$ reais. Então reinvestirei esta soma por mais um semestre e, no final do ano, em vez de $c_0(1+\alpha)$, vou receber $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2$, que é uma quantia maior. (Nosso investidor sabe que $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 > 1+\alpha$, pela desigualdade de Bernoulli.) Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente recebendo, no final de um ano, o total de $c_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$.

Como o número $\alpha = k/100$ lhe é conhecido, o investidor, com auxílio da calculadora, verifica imediatamente que $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$. Animado com o resultado, nosso ambicioso investidor imagina que, resgatando e reaplicando seu dinheiro num número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente seu capital.

Na verdade, fazendo o que imagina, no final do ano o investidor receberá o total acumulado igual a

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 \cdot e^{\alpha}.$$

Nosso personagem estava certo ao pensar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\alpha > 0$, se tem

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n < \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Mas, infelizmente, se enganou ao acreditar que a seqüência de termo geral $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ é ilimitada. Com efeito, todos esses termos são menores do que e^{α}.

Seja como for, ao conceber esse processo imaginário de resgatar e reinvestir a cada instante seu capital, nosso investidor foi conduzido à noção de juros compostos, acumulados continuamente.

O mesmo raciocínio é válido se considerarmos, para um número real arbitrário $t > 0$, o capital c_0 aplicado durante t anos, à mesma taxa α. Se tivéssemos juros simples, no final desses t anos o capital resultante seria $c_0(1+\alpha t)$. Dividindo o intervalo $[0, t]$ em n partes iguais, resgatando e reinvestindo n vezes, no final de t anos obteríamos $c_0\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n$ e, fazendo n crescer indefinidamente, chegamos a

$$c(t) = c_0\,e^{\alpha t} = c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n$$

como o resultado da aplicação do capital c_0, durante t anos, a uma taxa de $\alpha = k/100$ ao ano, de juros compostos, acumulados continuamente.

Em particular, o capital de 1 real aplicado a uma taxa de 100% ao ano, com juros acumulados continuamente, gera no final de um ano um total de e reais.

Evidentemente, a expressão $f(t) = c \cdot e^{\alpha t}$ pode também ser escrita sob a forma $f(t) = c \cdot a^t$, onde $a = e^{\alpha}$, portanto $\alpha = \ln a$. Ou, se houver preferência por uma determinada base b, pode-se sempre escrever $f(t) = c \cdot b^{\beta t}$, com $\beta = \frac{\alpha}{\ln b}$. Às vezes é conveniente tomar a base 2, de modo que se tem $f(t) = c \cdot 2^{\beta t}$, onde $\beta = \alpha/\ln 2$.

Matemáticos e cientistas que se utilizam da Matemática preferem geralmente escrever as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento de f, conforme mostraremos agora.

A *taxa de crescimento* de uma função f no intervalo de extremidades x, $x+h$ é, por definição, o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Este quociente pode também ser interpretado como a inclinação da secante que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$ do gráfico de f.

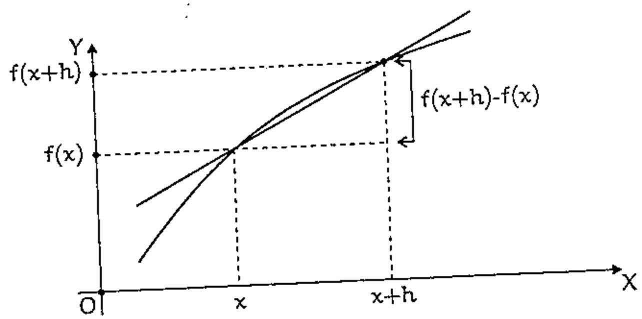


Figura 69

No caso particular da função $f(x) = be^{\alpha x}$, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = be^{\alpha x}\frac{e^{\alpha h}-1}{h} = f(x)\cdot\frac{e^{\alpha h}-1}{n}.$$

Chama-se *derivada* da função f no ponto x ao limite da taxa $[f(x+h)-f(x)]/h$ quando h tende para zero. Este número, cujo significado é o de taxa instantânea de crescimento de f no ponto x, é representado por $f'(x)$. Ele é o número real cujos valores aproximados são os quocientes $[f(x+h)-f(x)]/h$ para valores muito pequenos de h. Geometricamente, a derivada $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x.

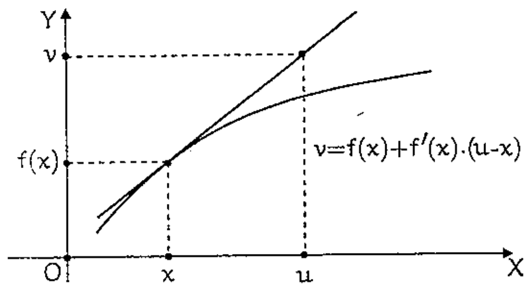


Figura 70

O sinal e o valor da derivada $f'(x)$ indicam a tendência da variação de f a partir do ponto x. Se $f'(x) > 0$ então $f(x+h) > f(x)$ para pequenos valores positivos de h. Se $f'(x) < 0$, tem-se, ao contrário, $f(x+h) < f(x)$ para h pequeno e positivo. Se $f'(x)$ é um número positivo grande, então f cresce rapidamente a partir de x. E assim por diante. A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal. Sua descoberta, há três séculos e meio, teve uma grande repercussão e provocou um progresso extraordinário na Ciência e em toda a civilização a partir daquela época.

Mostraremos agora que a derivada da função $f(x) = be^{\alpha x}$ é igual a $\alpha \cdot f(x)$. Noutras palavras, a taxa instantânea de crescimento de uma função do tipo exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. E o coeficiente α é precisamente o fator de proporcionalidade.

Assim, por exemplo, no caso do investimento, em que $c(t) = c_0 \cdot e^{\alpha t}$, se, a partir de um dado instante t_0, considerarmos um intervalo de tempo h muito pequeno, teremos aproximadamente $[c(t_0+h) - c(t_0)]/h \cong \alpha \cdot c(t_0)$, logo $c(t_0+h) - c(t_0) \cong c(t_0)\cdot \alpha h$.

Usando a interpretação geométrica do logaritmo natural, é fácil calcular a derivada da função $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$.

O ponto de partida consiste em mostrar que se tem

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Para ver isto, lembramos que a faixa de hipérbole $H_1^{e^h}$ tem área igual a h. Esta faixa está compreendida entre um retângulo de área $(e^h - 1)/e^h$ e outro de área $e^h - 1$. Portanto

$$\frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1.$$

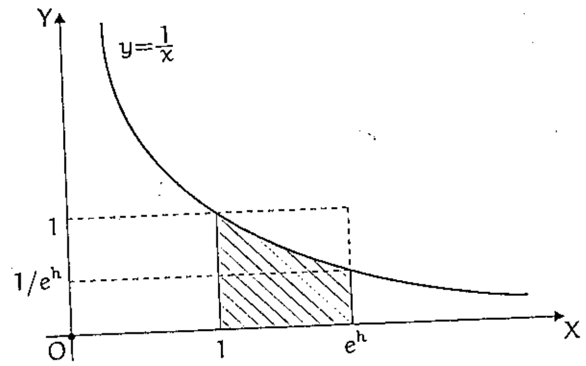


Figura 71

Aqui estamos supondo $h > 0$. Dividindo as duas desigualdades por $e^h - 1$, obtemos

$$\frac{1}{e^h} < \frac{h}{e^h - 1} < 1, \quad \text{para todo } h > 0.$$

Quando $h \to 0$, a potência e^h tende a 1. Segue-se das desigualdades acima que $\lim_{h\to 0} [h/(e^h - 1)] = 1$, logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

O caso em que $h \to 0$ por valores negativos se trata de modo análogo.

Agora é imediato ver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

e, mais geralmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^x}{h} = e^{\alpha x} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}.$$

Escrevendo $k = \alpha h$, vemos que $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$. Portanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{\alpha x}}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{e^k - 1}{k} = \alpha \cdot e^{\alpha x}.$$

Isto conclui a demonstração de que a derivada da função $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha \cdot f(x)$, logo é proporcional ao valor $f(x)$ da função f, sendo α o fator de proporcionalidade.

É óbvio que o mesmo vale para uma função do tipo $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$.

11. Como Verificar que $f(x+h)/f(x)$ Depende Apenas de h

O teorema de caracterização das funções de tipo exponencial fornece um critério elegante e matematicamente simples para determinar quando uma bijeção crescente ou decrescente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é da forma $f(x) = b \cdot a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$.

Para aplicar esse critério em situações concretas é indispensável saber decidir, em cada caso específico, se $f(x+h)/f(x)$ independe de x ou não.

Fixando h como constante, isto equivale a indagar se $f(x+h)/f(x)$ é constante, isto é, se $f(x+h) = c \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou ainda, se $f(x+h)$ é uma função linear de $f(x)$. (Não de x!)

Escrevendo $y = f(x)$, $y' = f(x')$ e pondo $f(x+h) = \xi(y)$, $f(x'+h) = \xi(y')$, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que ξ é uma função linear de y se, e somente se, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se a implicação:

$$y' = n \cdot y \quad \Rightarrow \quad \xi(y') = n \cdot \xi(y).$$

Em termos da função original f isto significa:

$$f(x') = n \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x'+h) = n \cdot f(x+h).$$

A implicação acima é, portanto, o critério que nos permitirá decidir se a função f é ou não do tipo exponencial. Vejamos como ele funciona em alguns exemplos.

Capital a juros fixos. Aqui $c(t)$ é o capital no instante t, resultante da aplicação, a juros fixos acumulados continuamente, de um capital inicial $c_0 = c(0)$. Então $c(t+h)$ pode ser considerado como o capital resultante da aplicação da quantia inicial $c(t)$ durante o tempo h. Logo, aplicando o valor $n \cdot c(t) = c(t')$ obtém-se, após o período h, $n \cdot c(t+h)$. Portanto, $c(t') = n \cdot c(t) \Rightarrow c(t'+h) = n \cdot c(t+h)$. Segue-se que $c(t) = c_0 \cdot a^t$, onde $a = c(1)/c_0$, ou $c(t) = c_0 \cdot e^{\alpha t}$, onde $\alpha = \ell n\, a$. Como $c(t)$ é uma função crescente de t, tem-se $a > 1$, ou seja, $\alpha > 0$.

Desintegração radioativa. Neste exemplo, $m(t)$ é a massa, no instante t, de uma substância radioativa que no início da contagem do tempo era $m_0 = m(0)$. Assim, $m(t+h)$ é o que resta da massa $m(t)$ da substância radioativa depois de decorrido o intervalo de tempo h a partir do instante t. É claro que se observarmos a massa $m(t') = n \cdot m(t)$, $n \in \mathbb{N}$, após o mesmo tempo h, veremos que restou $m(t'+h) = n \cdot m(t+h)$. Portanto podemos assegurar que $m(t) = m_0 \cdot e^{\alpha t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, como $m(t)$ é função decrescente de t, temos $\alpha < 0$.

Concentração de uma solução. Este é o protótipo de uma situação que ocorre em diversas circunstâncias, inclusive a eliminação de substâncias na corrente sangüínea humana. Vamos considerar um caso bastante simples, que pode indicar como se tratam questões análogas.

Neste exemplo, temos um tanque de volume V, no qual se encontra uma salmoura (solução de sal em água), que se mantém homogênea mediante a ação permanente de um misturador. O tanque recebe um fluxo constante de água enquanto uma torneira escoa a salmoura em quantidade igual, a cada instante, ao volume de água que entrou no tanque.

Procura-se determinar a fórmula que exprime o volume $f(t)$ do sal existente no tanque no momento t, portanto a taxa $f(t)/V$ que mede a concentração da solução naquele instante. Evidentemente, $f(t)$ é uma função decrescente de t.

Afirmamos que f é uma função de tipo exponencial. Com efeito, sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $f(t') = n \cdot f(t)$. (Observe que isto implica $t' \leqslant t$.) Fixemos arbitrariamente um intervalo de tempo h. Devemos mostrar que $f(t'+h) = n \cdot f(t+h)$. Para isto, imaginemos o tanque subdividido em n partes de igual volume V/n. Como a mistura é homogênea, em cada uma dessas partes a quantidade de sal nela contida no instante t' é igual a $f(t')/n$, ou seja igual a $f(t)$. O que ocorre em cada uma das subdivisões é, em escala $1/n$, o mesmo que ocorre no tanque inteiro. Logo, no instante $t'+h$, cada subdivisão vai conter o volume $f(t+h)$ de sal. No todo, vemos que o volume do sal contido no tanque inteiro no instante $t'+h$ é $f(t'+h) = n \cdot f(t+h)$.

Portanto, se b é o volume do sal contido no tanque no instante $t = 0$, a fórmula que exprime a quantidade de sal existente no tanque no tempo t é $f(t) = b \cdot a^t$, onde $a = f(1)/f(0) < 1$, ou seja, $f(t) = b \cdot e^{\alpha t}$, com $\alpha = \ell n\, a < 0$. Pela seção 10, temos $\alpha = f'(0)/b$, onde $f'(0) = \lim_{t \to 0}[f(t) - b]/t$. Seja ν o volume de água que entra no tanque (igual ao da salmoura que sai) na unidade de tempo. Num tempo t, a água que entra é νt e, se t for muito pequeno, o sal que sai na salmoura é aproximadamente $(b/V)\nu t$. Logo $f(t) \approx b - (b/V)\nu t$ e

$$f'(0) = \lim_{t \to 0}[f(t) - b]/t = -b\nu/V.$$

Assim $\alpha = -\nu/V$ e, em qualquer instante t, a quantidade de sal no tanque é $f(t) = b.e^{-(\nu/V)t}$.

Exercícios

1. Com um lápis cuja ponta tem 0,02mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

2. Dê exemplo de uma função crescente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a seqüência $f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+n), \ldots$ é uma progressão geométrica mas f não é do tipo $f(x) = b \cdot a^x$.

3. Dados $a > 0$ e $b > 0$, qual a propriedade da função exponencial que assegura a existência de $h \neq 0$ tal que $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Mostre como obter o gráfico de $y = b^x$ a partir do gráfico de $y = a^x$. Use sua conclusão para traçar o gráfico de $y = (1/\sqrt[3]{4})^x$ a partir do gráfico de $y = 2^x$.

4. Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

5. Dados $x_0 \neq 0$ e $y_0 > 0$ quaisquer, prove que existe $a > 0$ tal que $a^{x_0} = y_0$.

6. Dados $x_0 \neq x_1$ e y_0, y_1 não-nulos com o mesmo sinal, prove que existem $a > 0$ e b tais que $b \cdot a^{x_0} = y_0$ e $b \cdot a^{x_1} = y_1$.

7. A grandeza y se exprime como $y = b \cdot a^t$ em função do tempo t. Sejam d o acréscimo que se deve dar a t para que y dobre e m (meia-vida de y) o acréscimo de t necessário para que y se reduza à metade. Mostre que $m = -d$ e $y = b \cdot 2^{t/d}$, logo $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$.

8. Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se: (a) O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor; (b) A população estimada para o ano 2012; (c) Em que ano a população da terra era de 1 bilhão.

9. Dê um argumento independente de observações para justificar que, em condições normais, a população da terra após o decurso de períodos iguais fica multiplicada pela mesma constante.

10. Resolva os exercícios do livro "Logaritmos", especialmente os do último capítulo.

Capítulo 9

Funções Trigonométricas

1. Introdução

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

A Trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r o raio da circunferência então $c = 2r \operatorname{sen}(\alpha/2)$. Esta é a origem da palavra *seno*, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra, cavidade, *sinus* em latim). [Cfr. "Meu Professor de Matemática", pág. 187.]

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cosecante, o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de $\cos \hat{A}$, o cos-