Geometria Analítica

· Produto Misto

Calcular o produto misto dos vetores:

$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\vec{v} \times \vec{w} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6+9)\vec{i} - (-2-12)\vec{j} + (3-12)\vec{k}$$

$\vec{v} \times \vec{w} \quad 15\vec{i} + 14\vec{j} - 9\vec{k}$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 14 + 5 \cdot 9$

$= 30 + 42 + 45$

$= 27$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6+9) \cdot 2 - (-2-12) \cdot 3 + (3-12) \cdot 5$$

$= 30 + 42 + (-45)$

$12 + 36 + 15 - 60 + 6 + 18 \quad = \quad 27$

Propriedades do Produto Misto

I) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

- Se um dos vetores é nulo

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Se dois deles são colineares
  - Colineares $\rightarrow$ $\vec{u} = m\vec{v}$

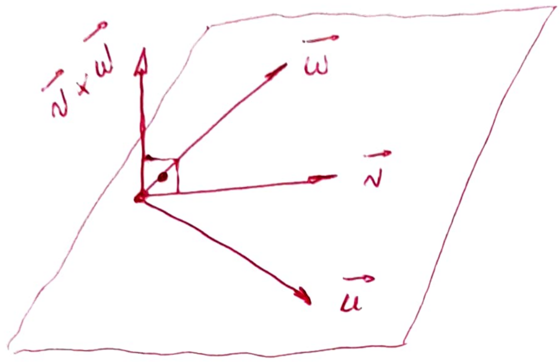
$\vec{u} = m x_2 \vec{i} + m y_2 \vec{j} + m z_2 \vec{k}$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} m x_2 & m y_2 & m z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

· Duas linhas iguais...

• Se os três são coplanares.

o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$ e também ortogonal a $\vec{u}$



Uma tripla $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, ou equivalentemente, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

• Condição de ortogonalidade: $\underline{\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

$$\underline{\underline{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0}}$$

II) Ordem circular:

Resulta desta propriedade, denominada propriedade cíclica, que os sinais $\cdot$ e $\times$ permutam entre si no produto misto de três vetores:

$$\underline{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}}$$

III) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 + x_4 & y_3 + y_4 & z_3 + z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Propriedade 3 do produto vetorial

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{u} \cdot [\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{r})] = \\ &\vec{u} \cdot [\vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{r}] = \\ &\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) = \\ &= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}) \end{aligned}}$$

IV) $(\vec{u}, \vec{v}, m\vec{w}) = (\vec{u}, m\vec{v}, \vec{w}) = (m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = m(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ mx_3 & my_3 & mz_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ mx_2 & my_2 & mz_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mx_1 & my_1 & mz_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

1) Verificar se são coplanares:

$\vec{u} = (3, -1, 4)$

$\vec{v} = (1, 0, -1)$

$\vec{w} = (2, -1, 0)$

Os três serão coplanares se: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 4 + 0 + 0 - 3$$

$$-5$$

$\therefore (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ logo, os vetores não são coplanares.

Exercício 2: Qual deve ser o valor de m para que os vetores sejam coplanares?

$\vec{a} = (m, 2, -1)$

$\vec{b} = (1, -1, 3)$

$\vec{c} = (0, -2, 4)$

$\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares quando $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4+6)m - (4-0) \cdot 2 + (-2+0) \cdot (-1) = 0$$

$$2m - 8 + 2 = 0$$

$$2m = 6$$

$$m = 3$$

R.

Exercício 3: Verificar se A, B, C e D estão no mesmo plano.

$A(1, 2, 4)$

$B(-1, 0, -2)$

$C(0, 2, 2)$

$D(-2, 1, -3)$

Os quatro pontos são coplanares se os vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ forem coplanares.

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$$

$\vec{AB} = B - A = (-2, -2, -6)$

$\vec{AC} = C - A = (-1, 0, -2)$

$\vec{AD} = D - A = (-3, -1, -7)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -12 - 6 + 14 + 4 = \underline{0}\ //.$$

Logo, os pontos são coplanares.

Interpretação geométrica do módulo do produto misto

Volume de um paralelepípedo:

$$V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

$$V = A_b \cdot h$$

$$A_b = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

$$h = \|\vec{u}\| \cdot |\cos\theta|$$

$$V = \|\underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\vec{a}}\| \|\vec{u}\| \cdot |\cos\theta|$$

$$V = \|\vec{a}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |\vec{u} \cdot \vec{a}|$$

$$\therefore \boxed{V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}\ //.$$

Exemplos:

$\vec{u} = (x, 5, 0)$

$\vec{v} = (3, -2, 1)$ $\qquad V = 24$ u.v.

$\vec{w} = (1, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24 \Rightarrow (2-1)x - (-3-1).5 = 24 \rightarrow \underline{\underline{|x+20| = 24}}$$

$x + 20 = 24$

$\underline{x = 4}$ //.

ou

$-x - 20 = 24$

$\underline{x = -44}$ //