a) $\displaystyle\int\frac{dx}{5 - 3\cos x}$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

c) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

d) $\displaystyle\int\sec^8 x\, dx$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3}$

f) $\displaystyle\int\operatorname{tg}^4 x \sec^4 x\, dx$

g) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}$

h) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}$

2.6. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES IRRACIONAIS

CASO 1

2.6.1. Integrais do tipo

$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots, x^{p_n/q_n})\, dx.$

Nesses casos, pela substituição $x = t^q$, onde q é o mmc dos inteiros $q_1, q_2, \ldots, q_n$, obtemos uma integral de função racional.

EXEMPLO: Encontre $\displaystyle I = \int\frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Colocamos $x = t^6$. Então $dx = 6t^5\, dt$ e

$$I = \int\frac{x^{1/2}\, dx}{1 + x^{1/3}} = \int\frac{t^3(6t^5\, dt)}{1 + t^2} = 6\int\frac{t^8}{1 + t^2}\, dt =$$

$$= 6\int\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \text{arc tg } t\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6 \text{ arc tg } x^{1/6} + C$$

2.6.2. Integrais da forma

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n/q_n}\right] dx$$

Nesses casos, a substituição

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q,$$

onde $q = \text{mmc}\{q_1, \ldots, q_n\}$, fornece uma integral de função racional.

EXEMPLO: Ache

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{1/2} - (2x-1)^{1/4}}$$

Fazendo a substituição $2x - 1 = t^4$, temos $dx = 2t^3\,dt$ e

$$I = \int \frac{2t^3\,dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 2\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

imprópria

$$= t^2 + 2t + 2\,L\,|t-1| + C = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} +$$

$$+ 2\,L\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C$$

pois $t = (2x-1)^{1/4}$

EXERCÍCIOS 2.6.

Calcule:

a) $\int \frac{x\,dx}{3+\sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(2x + 3)^{3/2}}$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 2} + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{(x + 1)^3}}$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{(x + 1)^2 - \sqrt{x + 1}}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{3 + \sqrt{x + 2}}{4 - \sqrt[4]{x + 2}}\, dx$

2.7. INTEGRAÇÃO DO TIPO $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ POR MEIO DE SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam integrais do tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx \qquad (1)$$

Veremos um método que reduz a integral acima para uma integral do tipo

$$\boxed{\int R(\text{sen } z, \cos z)\, dz,} \qquad (2)$$

— não necessariamente!! Há exceções

já estudadas na seção 2.5.

Completando o quadrado do trinômio dentro da raiz, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Façamos a mudança de variável