

Inequação

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Inequação produto

Exemplo

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação produto

$$(\star) (3x + 3)(5x - 3) > 0$$

Solução: (Resolução algébrica)

Primeiro caso: $3x + 3 > 0$ e $5x - 3 > 0$.

- $3x + 3 > 0 \Rightarrow x > -1$
- $5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{5}$

A interseção das duas soluções $S_1 \cap S_2 = (\frac{3}{5}, +\infty)$.

Segundo caso: $3x + 3 < 0$ e $5x - 3 < 0$

- $3x + 3 < 0 \Rightarrow x < -1$

- $5x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{5}$

A interseção das duas soluções $S_3 \cap S_4 = (-\infty, -1)$.

O conjunto solução da inequação (\star) é

$$S = S_1 \cap S_2 \cup S_3 \cap S_4 = \left(\frac{3}{5}, +\infty\right) \cup (-\infty, -1)$$

Observação:

Podemos resolver inequação (*) observando o sinal de

$f(x) = 3x + 3$, $g(x) = 5x - 3$ e $h(x) = (3x + 3)(5x - 3)$.

Quadro de Sinais:

Inequação quociente

Exemplo

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação quociente

$$(*) \frac{5x - 2}{3x + 4} < 0$$

Solução: (Resolução algébrica)

Primeiro caso: $5x - 2 > 0$ e $3x + 4 < 0$.

- $5x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$
- $3x + 4 < 0 \Rightarrow x < \frac{-4}{3}$

A interseção das duas soluções $S_1 \cap S_2 = (\frac{2}{5}, +\infty) \cap (-\infty, \frac{-4}{3}) = \emptyset$

Segundo caso: $5x - 2 < 0$ e $3x + 4 > 0$.

- $5x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$
- $3x + 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{-4}{3}$

A interseção das duas soluções

$$S_3 \cap S_4 = (-\infty, \frac{2}{5}) \cap (\frac{-4}{3}, +\infty) = (\frac{-4}{3}, \frac{2}{5}).$$

O conjunto solução da inequação (*) é

$$S = S_1 \cap S_2 \cup S_3 \cap S_4 = \emptyset \cup (\frac{-4}{3}, \frac{2}{5}) = (\frac{-4}{3}, \frac{2}{5})$$

Observação: Podemos resolver inequação (\star) observando o sinal de $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 3x + 4$ e $h(x) = \frac{5x-2}{3x+4}$.

Quadro de sinais

Exemplo

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação quociente

$$(\star) \frac{x-1}{x+1} \geq 3$$

Solução: Temos

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} \geq 3 &\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 3 \geq 0 \Rightarrow \\ \frac{x-1-3(x+1)}{x+1} &\geq 0 \Rightarrow \frac{-2x-4}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Agora resolve algébricamente ou fazendo o estudo do quadro de sinais.

Exemplo

Resolva, em \mathbb{R} , as inequação

$$\frac{1}{x-4} < \frac{2}{x+3}.$$

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-4} < \frac{2}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x+3-2(x-4)}{(x-4)(x+3)} < 0 &\Leftrightarrow \frac{-x+11}{(x-4)(x+3)} < 0 \end{aligned}$$

Agora fazemos o estudo dos sinais:

