

**MAC0317/MAC5920**

**Introdução ao Processamento de Sinais Digitais**

**Seção 4.5: Modelos de sinais infinitos e bi-infinitos**

## Sinais infinitos e bi-infinitos

Vamos considerar um sinal  $x(t)$  amostrado em instantes da forma  $t_k = kT$ , onde  $T$ =período de amostragem,  $R = \frac{1}{T}$ =taxa de amostragem.

Se  $k \in \mathbb{N}$ , teremos o *sinal de tempo infinito*  $x = (x_0, x_1, \dots)$ .

Se  $k \in \mathbb{Z}$ , teremos o *sinal de tempo bi-infinito*  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ .

## Os espaços $L^2(\mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{Z})$

O espaço vetorial  $L^2(\mathbb{N})$  corresponde aos elementos  $x = (x_0, x_1, \dots)$  onde  $x_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty.$$

Essa desigualdade representa a condição de energia finita.

O espaço vetorial  $L^2(\mathbb{Z})$  tem uma definição análoga, onde  $x_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

O nosso objetivo nessa seção é estender a definição de convolução para esses espaços, bem como seus resultados principais (linearidade, comutatividade, associatividade, teorema da convolução).

## O problema maior: definição do produto interno

Parece natural tentar usar a definição

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

onde  $x, y \in L^2(\mathbb{N})$ . Porém essa expressão faz sentido? E se fizer, ela define um produto interno em  $L^2(\mathbb{N})$ ?

## Lidando com séries (somas infinitas)

Sempre que usarmos a notação de somatório com uma quantidade infinita de termos, a interpretação dessa notação será:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Se esse limite for real ou complexo, dizemos que a série *converge*. Se for infinito ( $\pm\infty$ ) ou não existir, dizemos que a série *diverge*. Os três casos são ilustrados nos exemplos abaixo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \quad (\text{limite não existe}).$$

O produto interno em  $L^2(\mathbb{N})$  está bem-definido?

Não é óbvio que a expressão

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

esteja bem definida, ou seja, que dados  $x, y \in L^2(\mathbb{N})$ , a série sempre converge.

Para mostrar que esse é o caso, vamos mostrar que a série em valor absoluto  $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k \overline{y_k}|$  converge.

**A convergência de  $(x, y)$  depende da convergência de  $\Re(x, y)$  e  $\Im(x, y)$**

Começamos com algumas propriedades de números complexos: se  $z, w \in \mathbb{C}$ , então  $(|z| - |w|)^2 = |z|^2 - 2|z||w| + |w|^2 \geq 0$ , o que implica em

$$|zw| = |z||w| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2).$$

Então

$$\begin{aligned} |\Re(zw)| &\leq |zw| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2) \\ |\Im(zw)| &\leq |zw| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Re(x_k \overline{y_k}) + i \cdot \Im(x_k \overline{y_k})$$

converge se, e somente se,  $\sum_{k=0}^{\infty} \Re(x_k \overline{y_k})$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \Im(x_k \overline{y_k})$  convergem.

## Convergência das partes real e imaginária de $(x, y)$

Observe que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |\Re(x_k \overline{y_k})| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| |\overline{y_k}| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (|x_k|^2 + |y_k|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2}^{x \in L^2(\mathbb{N})} + \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2}^{y \in L^2(\mathbb{N})} \right] < \infty.\end{aligned}$$

A demonstração para  $\sum_{k=0}^{\infty} |\Im(x_k, \overline{y_k})|$  é análoga.



## $L^2(\mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{Z})$ são espaços com produto interno

Vimos que o produto interno

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k} < \infty$$

está bem-definido (no sentido da convergência da série  $\forall x, y \in L^2(\mathbb{N})$ ). As demais propriedades da definição do produto interno são mais fáceis de mostrar, e as provas se assemelham às provas do caso finito.

Analogamente, podemos verificar que em  $L^2(\mathbb{Z})$  a expressão a seguir também define um produto interno:

$$(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Assim podemos falar de *análise de Fourier* nesses espaços.

## Análise de Fourier em $L^2(\mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{Z})$

Para construir uma transformada de Fourier em  $L^2(\mathbb{N})$  e  $L^2(\mathbb{Z})$  devemos antes de mais nada entender *que tipo de representação espectral estamos buscando*.

### Exemplo de motivação

Considere como exemplo um sinal bi-infinito  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$  associado a uma taxa de amostragem  $R$  e que fosse analisado através de DFTs de segmentos finitos de tamanho  $N$  centrados na origem:

$$\left( x_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{\frac{N}{2}} \right).$$

A equação de síntese (IDFT) desse segmento será:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

Na equação

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} X_k e^{i2\pi kn/N}$$

o coeficiente  $X_k$  está associado a uma frequência que pode ser expressa de várias maneiras:

- $k \in \left\{ -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \right\}$  medida em ciclos completos no intervalo de tamanho  $N$ ;
- $\frac{k}{N} \in \left( -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right]$  medida em ciclos por amostra;
- $\frac{kR}{N} \in \left( -\frac{R}{2}, +\frac{R}{2} \right]$  medida em Hz.

Dessas medidas de frequência, a medida em *ciclos por amostra* é particularmente interessante porque a faixa de valores  $\left[ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right]$  não depende nem de  $N$  nem de  $R$ .

## Diferentes recortes $\implies$ diferentes resoluções espectrais

Considerando diferentes recortes

$$\left( x_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{\frac{N}{2}} \right)$$

(com diferentes valores de  $N$ ) do sinal bi-infinito  $x$  podemos afirmar que

- do ponto de vista *temporal*, teremos acesso a mais regiões do sinal com valores maiores de  $N$ ;
- do ponto de vista *espectral*, quanto maior o  $N$ , maior a quantidade de frequências da forma  $f = \frac{k}{N} \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$  utilizadas na representação, ou seja, maior a \*densidade do espectro amostrado no intervalo fixo  $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ .

Isso sugere que o espectro do sinal bi-infinito deveria usar todas as frequências  $f \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ .

## Espectro contínuo em função da frequência

Se escrevermos a DFT dos segmentos de tamanho  $N$  em função de  $f = \frac{k}{N}$ , teremos:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{f=-\frac{1}{2}+\frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi f n},$$

onde a função  $X(f) : \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \mapsto \mathbb{C}$  é amostrada nos pontos

$$f = \frac{k}{N} \quad \text{para} \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, +\frac{N}{2}.$$

## Limite das DFTs para $N \rightarrow \infty$

Tomando o limite para  $N \rightarrow \infty$ , poderíamos escrever

$$\begin{aligned} x_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{f=-\frac{1}{2} + \frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi f n} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{i2\pi f n} df \end{aligned}$$

onde a expressão intermediária  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum$  corresponde à própria definição da última integral, no sentido de Riemann.

## Transformada de Fourier de Tempo Discreto

**Def. 4.5.1:** Para um elemento  $x \in L^2(\mathbb{Z})$ , a transformada de Fourier de tempo discreto (DTFT) é a função  $X(f)$  definida para  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$  dada por

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n}.$$

Note que essa definição coincide com o produto interno  $X(f) = (x, E_f)$ , onde  $E_f$  é o vetor bi-infinito com componentes  $(E_f)_n = e^{i2\pi f n}$ .

A transformada inversa (IDTFT) é definida para  $n \in \mathbb{Z}$  como

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi f n} df.$$

### Comentário: Frequências em ciclos/amostra e em Hz

Se  $x$  foi obtido amostrando  $x_k = x(kT)$ , então a frequência de amostragem é  $\frac{1}{T}$  Hz e a frequência de Nyquist é  $\frac{1}{2T}$  Hz. Nesse caso, podemos fazer  $\tilde{f} = \frac{f}{T}$  e  $\tilde{X}(\tilde{f}) = X(\tilde{f}T)$  e assim podemos escrever a IDTFT como

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \tilde{X}(\tilde{f}) e^{i2\pi\tilde{f}Tn} T d\tilde{f}$$

e então a DTFT pode ser escrita como

$$\tilde{X}(\tilde{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i2\pi\tilde{f}Tn}$$



## Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{N})$

Para  $x \in L^2(\mathbb{N})$ , podemos definir  $x' \in L^2(\mathbb{Z})$  no qual  $x'_k = x_k$  se  $k \geq 0$  e  $x'_k = 0$  se  $k < 0$ . A DTFT de  $x \in L^2(\mathbb{N})$  pode ser calculada como a DTFT de  $x' \in L^2(\mathbb{Z})$ :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n}, \quad f \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$$

com a inversa (IDTFT) dada por

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi f n} df.$$

## Convolução e filtragem em $L^2(\mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{Z})$

**Def:** A convolução de dois elementos  $x, y \in L^2(\mathbb{Z})$  é definida como:

$$w_m = (x * y)_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{(m-k)}$$

Por exemplo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\
 w_0 := & \dots & \times & \times & \times & \times & \times & \dots \\
 & \dots & y_2 & y_1 & y_0 & y_{-1} & y_{-2} & \dots \\
 \hline
 & \dots + x_{-2}y_2 + x_{-1}y_1 + x_0y_0 + x_1y_{-1} + \dots & x_ny_{-n} + \dots & \rightarrow w_0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\
 w_1 := & \dots & \times & \times & \times & \times & \times & \dots \\
 & \dots & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & y_{-1} & \dots \\
 \hline
 & \dots + x_{-2}y_3 + x_{-1}y_2 + x_0y_1 + x_1y_0 + \dots & x_ny_{1-n} + \dots & \rightarrow w_1
 \end{array}$$

... e em geral:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\
 w_m := & \dots & \times & \times & \times & \times & \times & \dots \\
 & \dots & y_{m+2} & y_{m+1} & y_m & y_{m-1} & y_{m-2} & \dots
 \end{array}$$


---


$$\dots + x_{-2}y_{m+2} + x_{-1}y_{m+1} + x_0y_m + x_1y_{m-1} + \dots x_ny_{m-n} + \dots \rightarrow w_m$$

### Observação: $x * y$ não necessariamente possui energia finita

Mesmo que  $\|x\|^2 < \infty$  e  $\|y\|^2 < \infty$ , pois  $x, y \in L^2(\mathbb{Z})$ , não é necessariamente verdade que  $\|w\|^2 < \infty$ , ou seja, que  $w = x * y$  pertence a  $L^2(\mathbb{Z})$ . Porém, no caso em que  $x$  e  $y$  são construídos a partir de vetores finitos estendidos com zeros, é possível provar que a parte não-nula de  $w$  também é finita, e nesse caso será verdade que  $w \in L^2(\mathbb{Z})$ .

No caso geral, pode-se provar que  $w \in L^\infty(\mathbb{Z})$ , ou seja, que existe  $M > 0$  tal que  $|w_m| < M, \forall m \in \mathbb{Z}$ .

## Convolução em $L^2(\mathbb{N})$

A convolução em  $L^2(\mathbb{N})$  é definida como

$$(x * y)_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{(m-k)}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

onde  $x_k = 0$  para  $k < 0$  e  $y_{(m-k)} = 0$  para  $m - k < 0 \iff k > m$ , ou seja,

$$(x * y)_m = \sum_{k=0}^m x_k y_{(m-k)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

**Prop. 4.5.1:** Sejam  $x, y, w \in L^2(\mathbb{N})$  ou  $L^2(\mathbb{Z})$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ , então valem as propriedades de

Comutatividade:  $x * y = y * x$

Associatividade:  $(x * y) * w = x * (y * w)$

Linearidade:  $x * (ay + bw) = a(x * y) + b(x * w)$

## Teorema da convolução em $L^2(\mathbb{Z})$

**Teorema 4.5.1:** Sejam  $x$  e  $y \in L^2(\mathbb{Z})$  com DTFTs  $X(f)$  e  $Y(f)$ . Se  $w = x * y$ , então a DTFT de  $w$  é

$$W(f) = X(f)Y(f),$$

para todas as frequências  $f \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ .



**Prova:**

Pela definição da DTFT de  $x$  e  $y$ :

$$X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{-i2\pi f m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m z^{-m}$$

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^{-m}$$

onde  $z = e^{i2\pi f}$  e assim  $z^{-m} = (e^{i2\pi f})^{-m} = e^{-i2\pi f m}$ .

Então,

$$\begin{aligned} X(f)Y(f) &= \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \right] \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^{-m} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k y_m z^{-k-m}. \end{aligned}$$

Definindo  $s = k + m$  (e portanto  $m = s - k$ ), temos

$$\begin{aligned}
 X(f)Y(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_k y_{s-k} z^{-s} \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{s-k} \right] z^{-s} \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} (x * y)_s z^{-s} \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} w_s z^{-s} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} w_s e^{-i2\pi f s} = W(f)
 \end{aligned}$$

### Exemplo 4.5: Filtro da média

Seja  $h \in L^2(\mathbb{Z})$  com componentes  $h_0 = \frac{1}{2}$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}$  e  $h_k = 0$  para  $k \neq 0, 1$ , ou seja,

$$h = \left( \dots, 0, \overbrace{\frac{1}{2}}^{n=0}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right).$$

Considerando  $y = x * h$  para  $x \in L^2(\mathbb{Z})$  então  $h$  define o filtro associado à equação

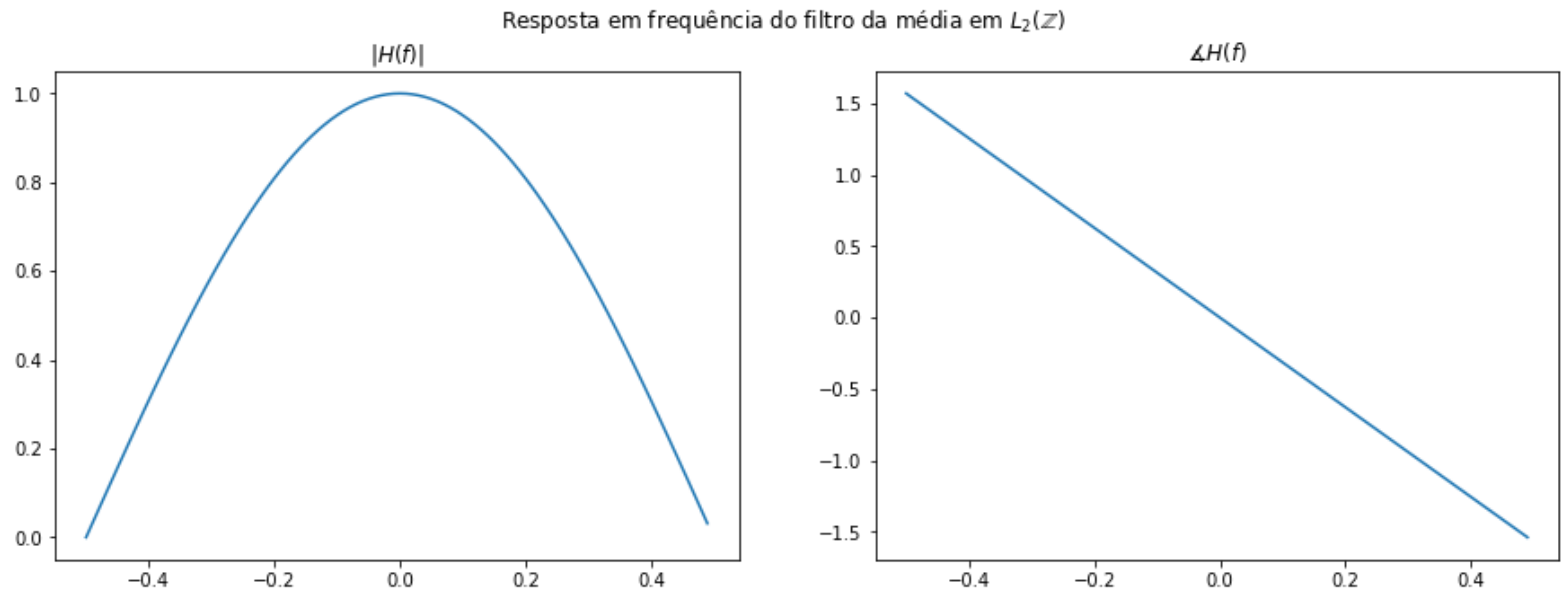
$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m x_{n-m} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1}.$$

Pelo teorema da convolução, teremos  $Y(f) = X(f)H(f)$ , onde

$$\begin{aligned} H(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i2\pi f k} \\ &= \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-i2\pi f} \\ &= e^{-i\pi f} \frac{1}{2} (e^{i\pi f} + e^{-i\pi f}) \\ &= e^{-i\pi f} \cos(\pi f) \\ \implies |H(f)| &= \cos(\pi f) \quad \angle H(f) = -\pi f, \end{aligned}$$

o que explica a ação do filtro da média como filtro passa-baixa também nesse contexto de sinais bi-infinitos.

```
In [7]: f = np.arange(-0.5,0.5,0.01); Hf = np.exp(-1j*m.pi*f)*np.cos(m.pi*f)
fig,ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(15,5));
fig.suptitle(r"Resposta em frequência do filtro da média em  $L_2(\mathbb{Z})$ ")
ax[0].plot(f,abs(Hf));ax[0].set_title(r" $|H(f)|$ ")
ax[1].plot(f,np.angle(Hf));ax[1].set_title(r" $\angle H(f)$ ");plt.show()
```



## Transformada $z$

Uma motivação para a introdução da transformada  $z$  é ampliar o poder de análise da resposta em frequência de filtros no contexto de sinais de duração arbitrária.

Dado  $x \in L^2(\mathbb{Z})$ , sua transformada  $z$  é definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

**Observação:** se essa expressão parece a DTFT de  $x$ , isso não é mera coincidência: de fato a DTFT é um caso particular da transformada  $z$  onde  $z = e^{i2\pi f}$ .

A transformada  $z$  admite duas interpretações:

- **Formal/Algébrica:**  $z$  é interpretado como um termo "literal", sujeito a manipulações algébricas usuais, mas não é substituído por valores numéricos.
- **Analítica:**  $z$  é interpretado como uma variável complexa, e  $X(\cdot)$  é uma "função de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ ".



## Exemplo 4.6

Seja  $x \in L^2(\mathbb{Z})$  com  $x_{-1} = 2$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -2$  e  $x_k = 0$ ,  $\forall k \neq -1, 0, 1, 2$ .

A transformada  $z$  de  $x$  é

$$X(z) = 2z^1 + 1z^0 + 3z^{-1} - 2z^{-2}.$$

1. interpretação formal:  $X(z)$  pode ser visto como uma "recodificação" da sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

*Nesse contexto, seria possível por exemplo construir expressões como*

$$\begin{aligned} X(z)^2 = X(z)X(z) = & 4z^2 + 4z^1 + 13z^0 - 2z^{-1} + 5z^{-2} \\ & - 12z^{-3} + 4z^{-4} \end{aligned}$$

*(observe que essa é a transformada  $z$  de  $x * x$ , sugerindo um teorema da convolução para a transformada  $z$ ).*

1. interpretação analítica:  $X$  pode ser visto como uma função de  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Nesse contexto, seria possível computar valores como*

$$X(1) = 4, \quad X(-1) = -6, \quad X(i) = 3 - i,$$

$$X(-i) = 3 + i$$

*(observe que esses são os valores da DTFT de  $x$  respectivamente em  $f = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ ).*

## Exemplo 4.7

Seja  $x$  de tempo bi-infinito onde  $x_0 = 0$  e  $x_k = \frac{1}{|k|}, \forall k \neq 0$ .

A transformada  $z$  de  $x$  é

$$X(z) = \dots + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + z^1 + 0 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} + \dots$$

Do ponto de vista analítico, temos:

- $|z| < 1$ : a soma dos expoentes positivos converge, mas a soma dos termos com expoente negativo diverge;
- $|z| > 1$ : a soma dos expoentes positivos diverge, mas a soma dos termos com expoente negativo converge;

Na melhor das hipóteses, a interpretação analítica permite considerar  $X(z)$  como função com domínio  $D \subseteq \{z \mid |z| = 1\}$  (mesmo assim o domínio não seria o círculo todo, pois para  $z = 1$  a série acima diverge).

## Exemplo 4.8

Seja  $x$  de tempo bi-infinito com  $x_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$

cuja transformada  $z$  é

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2z)^k}.$$

Se  $\left| \frac{1}{2z} \right| < 1$  ( $|z| > \frac{1}{2}$ ) então

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}}$$

Assim  $X(z)$  possui domínio  $D = \{z \mid |z| > \frac{1}{2}\}$ . Em particular  $X(z)$  está definido para  $|z| = 1$ , onde  $X(z)$  coincide com a transformada de Fourier (observe que esse sinal possui energia finita, ou seja,  $x \in L^2(\mathbb{Z})$ ).

Considere agora  $x$  de tempo bi-infinito onde  $x_k = \begin{cases} 0, & k \geq 0 \\ \frac{-1}{2^k}, & k < 0 \end{cases}$

com transformada  $z$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{1}{2^k} z^{-k} \\ &= \frac{-1}{(2z)^k} \\ &= -2z - 4z^2 - 8z^3 - \dots \end{aligned}$$

Assim  $X(z)$  está definida se  $|2z| < 1$  ( $|z| < \frac{1}{2}$ ).

## Convolução e transformada $z$

Se  $x, y \in L^2(\mathbb{Z})$  e  $w = x * y \in L^\infty(\mathbb{Z})$ , se  $X(z)$ ,  $Y(z)$  e  $W(z)$  são as transformadas  $z$  de  $x$ ,  $y$  e  $w$  respectivamente, então

$$W(z) = X(z)Y(z),$$

para qualquer  $z$  nos domínios de  $X$ ,  $Y$  e  $W$ .

A prova deste resultado é idêntica à do teorema 4.5.1.

## DTFT e Transformada $z$

Levando em consideração que

$$\begin{aligned} \text{(DTFT)} \quad X(f) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n (e^{i2\pi f})^{-n} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= X(z) \quad (\text{Transf. } z) \quad \text{para } z = e^{i2\pi f} \end{aligned}$$

e analogamente para  $Y$  e  $W$ , podemos entender o teorema da convolução para sinais bi-infinitos (teo. 4.5.1) como um caso particular do teorema da convolução para transformadas  $z$  usando o mapeamento  $z \leftrightarrow e^{i2\pi f}$ .

## Relação entre convolução (circular) em $\mathbb{C}^N$ e convolução (linear) em $L^2(\mathbb{Z})$

**Exemplo:**  $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$  e  $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$  e suas extensões  $\tilde{x}, \tilde{y} \in L^2(\mathbb{Z})$   
fazendo  $\tilde{x}_k = \tilde{y}_k = 0, \forall k \neq 0, 1, 2$ . Seja  $w = x * y \in \mathbb{C}^3$

$$w_0 = x_0 y_0 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$w_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_2$$

$$w_2 = x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0$$



Seja agora  $\tilde{w} = \tilde{x} * \tilde{y} \in L^2(\mathbb{Z})$

$$\tilde{w}_0 = x_0 y_0 + x_1(0) + x_2(0) = x_0 y_0$$

$$\tilde{w}_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2(0) = x_0 y_1 + x_1 y_0$$

$$\tilde{w}_2 = x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0$$

$$\tilde{w}_3 = x_0(0) + x_1 y_2 + x_2 y_1 = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$\tilde{w}_4 = x_0(0) + x_1(0) + x_2 y_2 = x_2 y_2$$

$$\tilde{w}_k = 0, \quad \forall k \neq 0, 1, 2, 3, 4$$

Note que

$$\begin{aligned}w_0 &= (x_0 y_0) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) &= \tilde{w}_0 + \tilde{w}_3 \\w_1 &= (x_0 y_1 + x_1 y_0) + (x_2 y_2) &= \tilde{w}_1 + \tilde{w}_4 \\w_2 &= (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) &= \tilde{w}_2.\end{aligned}$$

É possível provar que esse resultado vale em geral, ou seja,

$$w_k = (\tilde{w}_k + \tilde{w}_{N+k}), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

através da relação entre as transformadas  $z$  de  $w$  (conv. circular) e  $\tilde{w}$  (conv. linear):

**Teorema 4.5.3:**

$$W(z) = \tilde{W}(z) \mod z^{-N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=n \% N} \tilde{w}_m \right] z^{-n}$$

(a leitura da seção 4.5.5 onde aparece a prova desse teorema é opcional).

## Seção 4.5.6: Terminologia de filtros

Consideramos um *filtro de resposta impulsiva finita* (FIR) qualquer vetor  $h \in L^2(\mathbb{Z})$  que satisfaça

$$h_m = 0, \forall n \notin \{L, L+1, \dots, M-1, M\}, \quad \text{para } L, M \in \mathbb{Z}.$$

Assim, qualquer convolução do tipo  $x * h$  para  $x \in L^2(\mathbb{Z})$  será computável (a cada amostra  $n$ ) como

$$(x * h)_n = \sum_{m=L}^M h_m x_{n-m}.$$

A terminologia FIR está relacionada com o fato de que se a entrada do filtro é o impulso  $\delta$  ( $\delta_0 = 1, \delta_n = 0, \forall n \neq 0$ ) então a saída será  $(\delta * h) = h$ .

Um filtro FIR é dito *causal* se  $L \geq 0$ , ou seja, se a equação  $(x * h)_n$  só depende dos valores passados  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ . Se  $L < 0$  a saída  $(x * h)_n$  dependerá de valores futuros da entrada. Filtros causais são especialmente importantes no contexto de *processamento de sinais em tempo-real*, onde a cada instante  $n$  a entrada disponível/conhecida é  $(\dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, ?, ?, ?, \dots)$ .

Um filtro é dito *simétrico* se satisfaz

$$h_m = h_{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Apesar de não ser causal, esse tipo de filtro tem propriedades matemáticas importantes que serão exploradas no capítulo 6.

### Seção 4.5.7: Os espaços $L^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

Todos os resultados desenvolvidos para sinais infinitos e bi-infinitos podem ser estendidos facilmente para imagens infinitas  $L^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  e bi-infinitas  $L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  de *energia finita*, ou seja, que satisfaçam

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |a_{r,s}|^2 < \infty.$$

O *produto interno* nesses espaços é definido como

$$(A, B) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{r,s} \overline{b_{r,s}}.$$

A transformada de Fourier de  $A$  será a função  $\hat{A}(f, g)$  de duas frequências  $f, g \in \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$  definida por

$$\hat{A}(f, g) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{r,s} e^{-i2\pi(fr+gs)},$$

cuja inversa é dada por

$$a_{r,s} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \hat{A}(f, g) e^{i2\pi(fr+gs)} df dg.$$

A *convolução* é definida como

$$(A * B)_{r,s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{k,l} b_{r-k,s-l},$$

e o teorema da convolução garante que se  $C = A * B$  então

$$\hat{C}(f, g) = \hat{A}(f, g) \hat{B}(f, g).$$