7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-06-01

Outline

Eventos

- Na teoria da probabilidade, queremos associar uma probabilidade a cada uma das possibilidades de um fenômeno. As diversas possibilidades são denominadas eventos.
- Por exemplo, se estamos avaliando o lançamento de um dado, os eventos possíveis estão relacionados com os valores da face voltada para cima após o lançamento.
- Distinguimos os eventos em elementares e compostos.
- Os eventos elementares são os que não podem ser decompostos. Por exemplo, no lançamento do dado, os seis valores distintos das faces.
- Os eventos compostos se constituem em conjuntos de eventos elementares. No lançamento do dado, podemos por exemplo querer saber a probabilidade da face superior ser par.

Formalização

- Temos então um conjunto Ω de todos os eventos elementares.
- Temos também um conjunto $\mathcal{A}$ com todos os eventos possíveis (elementares ou compostos).
- O conjunto $\mathcal{A}$ satisfaz:
  1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
  2. Para um conjunto contável de eventos $A_i \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_i A_i$ e $\bigcap_i A_i$ são também eventos;
  3. Para qualquer evento A o seu complemento A_c é também um evento.

Exemplo

- No caso do lançamento do dado, temos:
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
  - $\mathcal{A}$ é o conjunto de todas as combinações possíveis de $0, 1, 2, \ldots, 6$ elementos de Ω distintos.
- É fácil de ver que este conjunto $\mathcal{A}$ satisfaz as condições necessárias.

Probabilidade

- Queremos agora definir uma probabilidade para qualquer evento em $\mathcal{A}$.
- Isto corresponde a uma função $P(e), e \in \mathcal{A}$.
- Esta função deve satisfazer:
  1. $P(\varnothing) = 0$;
  2. $P(\Omega) = 1$;
  3. Dada uma sequência de eventos disjuntos (A_n) então

$$P\left(\cup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

- Estas regras implicam que $0 \leq P(e) \leq 1$ para qualquer evento.

Exemplo

- No caso do lançamento de dados, podemos considerar um dado justo associando
$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
e associando valores de probabilidade para os outros eventos possíveis de acordo com a regra 4 anterior, isto é
$$P(A) = \frac{|A|}{6},$$
onde $|A|$ é a cardinalidade do conjunto A.

Variáveis aleatórias

- Considere uma função X de um evento elementar nos reais,

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

- Seja o conjunto

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

  para um dado $x \in \mathbb{R}$.
- Este conjunto é um evento e então X é denominada uma variável aleatória.

Função de distribuição cumulativa

- Dada uma variável aleatória X, podemos associar uma função

$$F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$$

  tal que

$$F_x(x) = P\left(X \leq x\right),$$

  onde usamos a notação

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}\right).$$

- A função $F_X(x)$ é denominada função de distribuição cumulativa
- Ela indica a probabilidade do evento ser associado com um valor menor ou igual a x na variável aleatória X.

Variáveis contínuas e discretas

- Se $F_X(x)$ é absolutamente contínua, então dizemos que X é uma variável aleatória contínua.
- Se $F_X(x)$ é contínua em pedaços, com discontinuidades nos pontos x_k, X é chamada uma variável aleatória discreta.
- A uma variável aleatória discreta, podemos associar uma distribuição de probabilidades discreta que é uma sequência (p_k) nos pontos x_k dados pelo salto de $F_X(x)$ nesses pontos.
- A uma variável aleatória contínua, podemos associar uma densidade de probabilidades que é uma função $\rho_X(x)$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_X(y) dy.$$

Algumas propriedades

- Pela definição anterior, temos também:

$$\rho_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

- Como $P(\Omega) = 1$ concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x)\, dx = 1.$$

- Em geral, nos referimos diretamente às variáveis aleatórias, sem fazer referência aos eventos associados com elas.

Momentos

- O momento de ordem n de uma variável aleatória X é definido como

$$m_n(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x).$$

- Para variáveis contínuas temos:

$$m_n(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho_X(x)\, dx.$$

- Para variáveis discretas:

$$m_n(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n p_k.$$

Propriedades importantes

Média Indica o valor médio esperado da variável:

$$\langle X \rangle = m_1(X).$$

Variância Quantifica o quanto os valores de X variam:

$$\sigma^2(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2,$$

onde usamos X^2 para a variável aleatória que produz x^2 sempre que X produz x.

Desvio padrão Também quantifica a variabilidade de X. É a raiz quadrada da variância:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}.$$

Propriedades importantes (cont)

Assimetria (*skewness*) Indica o quanto a distribuição é assimétrica em relação à média:

$$\left\langle \left(\frac{X - \langle X \rangle}{\sigma} \right)^3 \right\rangle = \frac{\langle X^3 \rangle - 3\langle X \rangle \sigma^2 - \langle X \rangle}{\sigma^3}.$$

Curtose (*kurtosis*) Indica o quanto a distribuição se afasta da média, isto é, a curtose será maior se valores mais distantes da média forem mais prováveis:

$$\left\langle \left(\frac{X - \langle X \rangle}{\sigma} \right)^4 \right\rangle.$$

Distribuição gaussiana ou normal

- Uma distribuição muito importante é a denominada gaussiana ou normal, definida por:
$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$
onde os parâmetros $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.
- Uma variável distribuida gaussianamente com média μ e variância σ^2 é geralmente representada por $G(\mu, \sigma^2)$ ou $N(\mu, \sigma^2)$.

Características

- A média dessa distribuição é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu.$$

- A variância vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\, dx - \mu^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \mu^2 = \sigma^2.$$

- A guassiana é simétrica em relação é média, e portanto sua assimetria é zero.
- A curtose da gaussiana vale 3, independente de μ ou σ.

z-Score

- O valor de x aparece na distribuição gaussiana apenas na expressão

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

- Esse valor é o denominado z-score do valor da variável na distribuição. Note que o z-score tem média 0, variância 1 e distribuição dada por

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),$$

  isto é, uma distribuição gaussiana com média 0 e desvio padrão 1.
- Esta é uma forma comum de normalizar distribuições gaussianas para realizar comparações entre elas.
- Por exemplo, ao comparar resultados de alunos que fizeram provas distintas sobre o mesmo assunto, podemos usar o z-score na comparação. O uso da nota diretamente estaria sujeito a problemas com variações nas questões.

Teorema central do limite

- Considere (X_j) uma sequência de variáveis aleatórias independentes com médias m_j e variâncias σ_j^2, respectivamente.
- O teorema central do limite estabelece que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} (X_j - m_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}}$$

  converge para uma gaussiana com média 0 e variância 1, $G(0,1)$.
- O teorema exige também que:

$$\langle |X_j - m_j|^3 \rangle < \infty$$

  e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \langle |X_j - m_j|^3 \rangle}{\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Importância

- Variáveis aleatórias reais podem frequentemente ser entendidas como uma soma de diversas outras variáveis aleatórias, e portanto devem ter distribuição gaussiana.
- Para verificar se dados seguem uma distribuição gaussiana podemos:
  - Calcular a assimetria. Ela deve ser zero (no caso de dados reais, muito próxima de zero).
  - Calcular o excesso de curtose, isto é, o valor de curtose subtraído de 3. Este também deve ser zero (ou muito próximo) se os dados forem gaussianos.
  - Avaliar a mediana. A mediana é o valor de x para o qual $F_X(x) = \frac{1}{2}$. Numa distribuição gaussiana ele deve ser igual à média.