

Campos de Radiação II

[W. Panofsky & M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism, Cap. 14]

→[Bo Thidé; Electromagnetic Field Theory; Cap. 6]

Transformada de Fourier dos Campos de Radiação

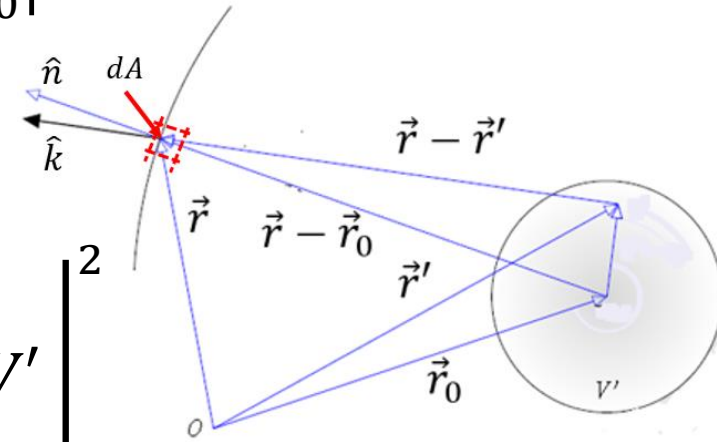
$$\vec{B}_{rad}(\vec{r}, \omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \int [\vec{J}(\vec{r}', \omega) \times \hat{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV'$$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, \omega) = c\vec{B}_{rad}(\vec{r}, \omega) \times \hat{k}; \quad \hat{k} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Potência radiada em sinais monocromáticos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} R_0 \left| \int [\vec{J}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2$$

$$R_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$



Observação

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{real} \implies \vec{E}(\vec{r}, -\omega) = \vec{E}^*(\vec{r}, \omega)$$

Potência radiada para sinais com largura de banda finita

Energia transmitida por unidade de área, perpendicular à direção de propagação, dada por

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(t) dt &= \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \times \vec{B} dt = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{\omega'}) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 2\pi\delta(\omega + \omega') \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(t) dt &= \frac{2\pi}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{-\omega}) d\omega = \frac{2\pi}{\mu_0} \left[\int_0^{\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{-\omega}) d\omega - \int_0^{-\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{-\omega}) d\omega \right] \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0} \left[\int_0^{\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_{-\omega}) d\omega + \int_0^{\infty} (\vec{E}_{-\omega} \times \vec{B}_\omega) d\omega \right] = \frac{2\pi}{\mu_0} \int_0^{\infty} (\vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* + \vec{E}_\omega^* \times \vec{B}_\omega) d\omega \end{aligned}$$

No cálculo do campo radiado por fontes monocromáticas, vimos que

$$\vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* + \vec{E}_\omega^* \times \vec{B}_\omega = 4\mu_0 \langle \vec{S}(t) \rangle = \mu_0 \frac{R_0}{8\pi^2} \left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2 \frac{\hat{k}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(t) dt = \frac{R_0}{4\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2 \frac{\hat{k}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

A energia que atravessa um elemento de área $d\vec{A}$ será então

$$dU = \frac{R_0}{4\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2 \left\{ \frac{d\vec{A} \cdot \hat{k}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right\}$$

Como vimos na aula Campos de Radiação I, o termo entre colchetes é aproximadamente o elemento de ângulo sólido $d\Omega$. Então podemos escrever

$$\frac{dU}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{dU_\omega}{d\Omega} d\omega; \frac{dU_\omega}{d\Omega} = \frac{R_0}{4\pi} \left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2$$

A grandeza U_ω é denominada Densidade Espectral de Energia.

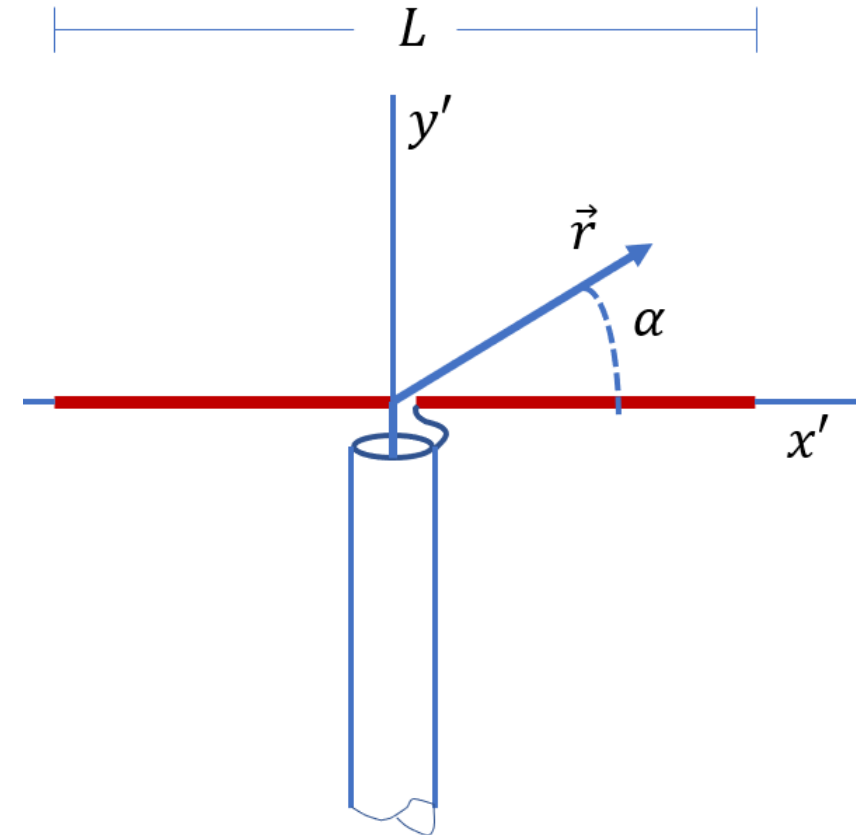
Exemplo: Antena Dipolo Linear com frequência fixa

(Panofsky & Phillips, p.251; Thidé, Sec. 6.4.1)

OBS: Em geral, cálculo do campo de radiação de uma

antena só pode ser feito numericamente, porque a distribuição de corrente na antena depende do campo, enquanto o campo depende da distribuição de corrente.

Solução exata é obtida resolvendo um problema de contorno.



Densidade de corrente

Tem que se cancelar nas extremidades da antena $\rightarrow$ onda estacionária

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = I_0 \delta(y') \delta(z') \frac{\sin \left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right]}{\sin \left(k \frac{L}{2} \right)} \hat{e}_x$$

Campo de radiação tem simetria com relação ao eixo da antena: podemos escolher $\vec{r}$ no plano (x', y') . Por outro lado, como $\vec{r}_0 = 0$, temos

$$\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0) = kx' \cos \alpha ;$$

e

$$\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k} = I_0 \delta(y') \delta(z') \frac{\sin \left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right]}{\sin \left(k \frac{L}{2} \right)} k \sin \alpha \hat{e}_z$$

Portanto

$$\left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right| = \frac{I_0 k \sin \alpha}{\sin \left(k \frac{L}{2} \right)} \times$$
$$\times \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right] \cos(kx' \cos \alpha) dx' - i \int_{-L/2}^{L/2} \underbrace{\left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right]}_{\text{par}} \underbrace{\sin(kx' \cos \alpha)}_{\text{impar}} dx' \right\}$$

$$\therefore \left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right| = 2 \frac{I_0 k \sin \alpha}{\sin \left(k \frac{L}{2} \right)} \int_0^{L/2} \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] \cos(kx' \cos \alpha) dx'$$

Para fazer a integral, utilizamos a relação trigonométrica

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a + b) + \frac{1}{2} \sin(a - b)$$

Portanto

$$\int_0^{L/2} \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] \cos(kx' \cos \alpha) dx' = \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - x'(1 - \cos \alpha) \right) \right] dx' + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - x'(1 + \cos \alpha) \right) \right] dx' = \left[\cos \left(k \frac{L}{2} \cos \alpha \right) - \cos \left(k \frac{L}{2} \right) \right] \frac{1}{k[1 - (\cos \alpha)^2]}$$

Substituindo este resultado na expressão para

$$\left| \int [\vec{j}(\vec{r}', \omega) \times \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_0)} dV' \right|$$

obtemos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{R_0 I_0^2}{32\pi^2} \left[\frac{\cos \left(k \frac{L}{2} \cos \alpha \right) - \cos \left(k \frac{L}{2} \right)}{\sin \left(k \frac{L}{2} \right) \sin \alpha} \right]^2$$

Esta expressão fornece a distribuição angular da potência radiada pela antena por unidade de ângulo sólido → Diagrama de Radiação.

- Diagrama de Radiação depende da relação L/λ (ver www.antenna-theory.com)
- Na direção do eixo da antena não há radiação

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \alpha\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\sin\left(k \frac{L}{2}\right) \sin \alpha} \sim \frac{kL}{4} \alpha \rightarrow 0$$

Boa referência sobre teoria de antena

C.A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design

