Física 1 (4310145) - Aula 12/05/2020



Informações

- Capítulo 2
  - Perguntas: Todas!
  - Problemas: 2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 2.14, 2.17, 2.21, 2.31, 2.37, 2.41, 2.67, 2.69
- Capítulo 3
  - Perguntas: 3.1, 3.3, 3.5 , 3.12, 3.13
  - Problemas: 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.9, 3.10, 3.15, 3.32, 3.27, 3.33, 3.37, 3.43
- Capítulo 4
  - Perguntas: 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.13, 4.17
  - Problemas: 4.1, 4.3, 4.7, 4.9, 4.11, 4.19, 4.25, 4.29, 4.47, 4.57, 4.65, 4.69
- Capítulo 5
  - Perguntas: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.9
  - Problemas: 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7, 5.11, 5.13, 5.15, 5.19, 5.21, 5.31, 5.35, 5.45, 5.63
- Capítulo 6
  - Perguntas: 6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.9. 6.13
  - Problemas: 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.13, 6.19, 6.25, 6.33, 6.39, 6.41, 6.43, 6.57, 6.59
- Capítulo 7
  - Perguntas: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.9, 7.11
  - Problemas: 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.15, 7.17, 7.21, 7.23, 7.31, 7.37, 7.41, 7.43, 7.45, 7.49, 7.67
- Capítulo 8
  - Perguntas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.9, 8.11
  - Problemas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.7, 8.9, 8.13, 8.15, 8.19, 8.25, 8.37, 8.39, 8.41, 8.45, 8.47, 8.53, 8.57, 8.67
- Capítulo 9
  - Perguntas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.9, 9.11
  - Problemas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.11, 9.13, 9.17 , 9.19, 9.25, 9.29, 9.33, 9.37, 9.39, 9.41, 9.45, 9.49, 9.51, 9.55, 9.61, 9.63, 9.73, 9.75
- Capítulo 10
  - Perguntas:
  - Problemas:
- Capítulo 11
  - Perguntas:
  - Problemas:

jader.pereira.santos@gmail.com (11-963653978)
felipefreitas@usp.br

Sumário

1. Energia Potencial e Conservação de Energia
   - Conservação da Energia
2. Centro de Massa e Momento Linear
   - O centro de massa

Sumário

1. Energia Potencial e Conservação de Energia
   - Conservação da Energia
2. Centro de Massa e Momento Linear
   - O centro de massa

Sumário

1. Energia Potencial e Conservação de Energia
   - Conservação da Energia
2. Centro de Massa e Momento Linear
   - O centro de massa

- No mundo macroscópico, forças não-conservativas dissipativas sempre estão presentes!
  - atrito
  - deformação de um objeto
  - reações químicas

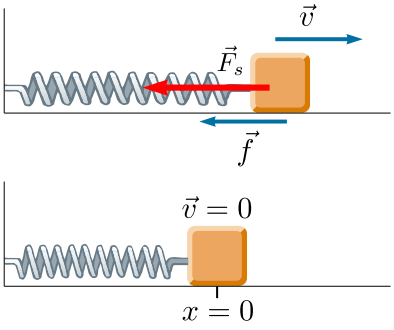
Lei de conservação de energia

O acréscimo ou decréscimo da energia total de um sistema pode sempre ser contabilizado pelo desaparecimento ou aparecimento de energia fora do sistema

$$E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}} = \Delta E_{\text{sis}}$$

Teorema trabalho-energia

$$W_{\text{ext,}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$



Exemplo: Toboágua

Em um toboágua um carrinho ($m = 200\text{kg}$) é impulsionado por uma mola (compressão inicial $d = 5,00\text{m}$ e $k = 3,20 \times 10^3\text{N/m}$) e desce um escorrega (altura $h = 35,0\text{m}$) até a base do brinquedo onde se move horizontalmente até que o atrito com a água ($\mu_k = 0,800$) o faça parar. Qual é a distância que o carrinho percorre no trecho horizontal até parar?

- Sistema: carrinho + escorrega+ mola + Terra + parede
- Sistema isolado: $\Delta E_{\text{sis}} = 0$

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

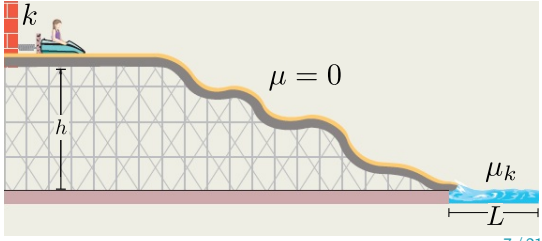
$$\Delta E_{\text{mec}} = -\Delta E_{\text{térm}}$$

$$E_{\text{mec,i}} = U_e + U_g = \frac{1}{2}kd^2 + mgh$$

$$E_{\text{mec,f}} = 0$$

- Já vimos que:

$$\Delta E_{\text{térm}} = f_k L = (F_N \mu_k) L = (mg\mu_k) L$$



Exemplo: Toboágua

Em um toboágua um carrinho ($m = 200\text{kg}$) é impulsionado por uma mola (compressão inicial $d = 5,00\text{m}$ e $k = 3,20 \times 10^3\text{N/m}$) e desce um escorrega (altura $h = 35,0\text{m}$) até a base do brinquedo onde se move horizontalmente até que o atrito com a água ($\mu_k = 0,800$) o faça parar. Qual é a distância que o carrinho percorre no trecho horizontal até parar?

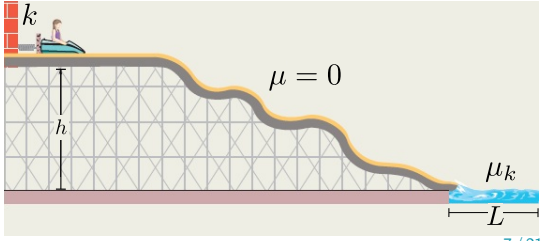
- Sistema: carrinho + escorrega+ mola + Terra + parede
- Sistema isolado: $\Delta E_{\text{sis}} = 0$

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$
$$\Delta E_{\text{mec}} = -\Delta E_{\text{térm}}$$

$$E_{\text{mec,i}} = U_e + U_g = \frac{1}{2}kd^2 + mgh$$
$$E_{\text{mec,f}} = 0$$

- Já vimos que:

$$\Delta E_{\text{térm}} = f_k L = (F_N \mu_k) L = (mg\mu_k) L$$



Exemplo: Toboágua

Em um toboágua um carrinho ($m = 200\text{kg}$) é impulsionado por uma mola (compressão inicial $d = 5,00\text{m}$ e $k = 3,20 \times 10^3\text{N/m}$) e desce um escorrega (altura $h = 35,0\text{m}$) até a base do brinquedo onde se move horizontalmente até que o atrito com a água ($\mu_k = 0,800$) o faça parar. Qual é a distância que o carrinho percorre no trecho horizontal até parar?

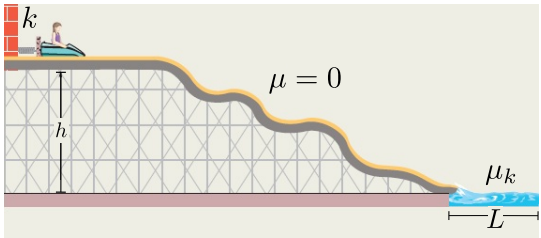
- Sistema: carrinho + escorrega+ mola + Terra + parede
- Sistema isolado: $\Delta E_{\text{sis}} = 0$

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$
$$\Delta E_{\text{mec}} = -\Delta E_{\text{térm}}$$

$$E_{\text{mec,i}} = U_e + U_g = \frac{1}{2}kd^2 + mgh$$
$$E_{\text{mec,f}} = 0$$

- Já vimos que:

$$\Delta E_{\text{térm}} = f_k L = (F_N \mu_k) L = (mg\mu_k) L$$



Exemplo: Toboágua

Em um toboágua um carrinho ($m = 200\text{kg}$) é impulsionado por uma mola (compressão inicial $d = 5,00\text{m}$ e $k = 3,20 \times 10^3\text{N/m}$) e desce um escorrega (altura $h = 35,0\text{m}$) até a base do brinquedo onde se move horizontalmente até que o atrito com a água ($\mu_k = 0,800$) o faça parar. Qual é a distância que o carrinho percorre no trecho horizontal até parar?

- Sistema: carrinho + escorrega+ mola + Terra + parede
- Sistema isolado: $\Delta E_{\text{sis}} = 0$

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$
$$\Delta E_{\text{mec}} = -\Delta E_{\text{térm}}$$

$$E_{\text{mec,i}} = U_e + U_g = \frac{1}{2}kd^2 + mgh$$
$$E_{\text{mec,f}} = 0$$

- Já vimos que:

$$\Delta E_{\text{térm}} = f_k L = (F_N \mu_k) L = (mg\mu_k) L$$

- Finalmente temos

$$L = \frac{1}{2}\frac{kd^2}{mg\mu_k} + \frac{h}{\mu_k}$$
$$\boxed{L = 69,3\text{m}}$$

Exemplo: Subindo escadas

Suponha que você tem massa m e você sobe um lance de escada de altura h. Discuta a aplicação da conservação de energia do sistema constituído unicamente por você.

- Sistema: você

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$

- O trabalho externo é

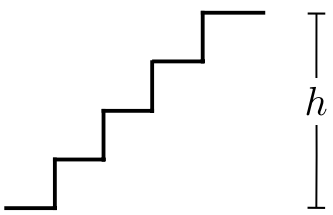
$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

- Além disso

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

- Sendo assim

$$\boxed{\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})}$$



Exemplo: Subindo escadas

Suponha que você tem massa m e você sobe um lance de escada de altura h. Discuta a aplicação da conservação de energia do sistema constituído unicamente por você.

- Sistema: você

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$

- O trabalho externo é

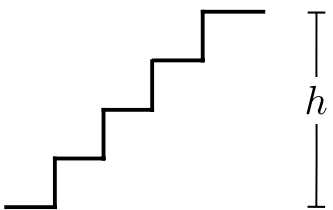
$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

- Além disso

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

- Sendo assim

$$\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$$



Exemplo: Subindo escadas

Suponha que você tem massa m e você sobe um lance de escada de altura h. Discuta a aplicação da conservação de energia do sistema constituído unicamente por você.

- Sistema: você

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$

- O trabalho externo é

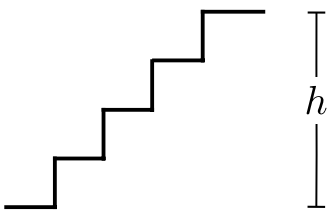
$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

- Além disso

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

- Sendo assim

$$\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$$



Exemplo: Subindo escadas

Suponha que você tem massa m e você sobe um lance de escada de altura h. Discuta a aplicação da conservação de energia do sistema constituído unicamente por você.

- Sistema: você

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$

- O trabalho externo é

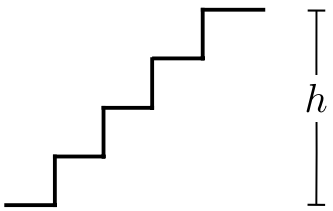
$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

- Além disso

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

- Sendo assim

$$\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$$



Exemplo: Subindo escadas

Suponha que você tem massa m e você sobe um lance de escada de altura h. Discuta a aplicação da conservação de energia do sistema constituído unicamente por você.

- Sistema: você

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{outras}}$$

- O trabalho externo é

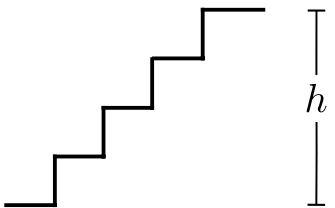
$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

- Além disso

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

- Sendo assim

$$\boxed{\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})}$$



Sumário

1. Energia Potencial e Conservação de Energia
   - Conservação da Energia
2. Centro de Massa e Momento Linear
   - O centro de massa

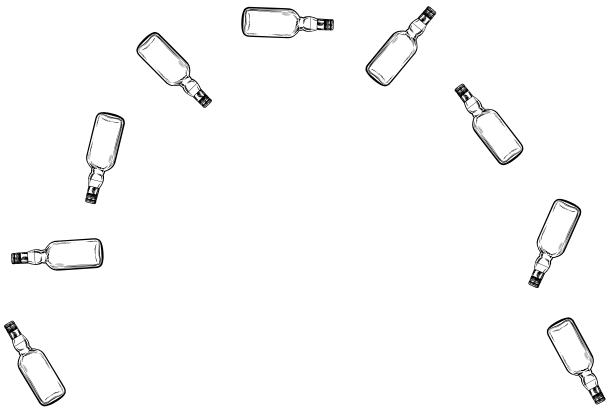
Sumário

1. Energia Potencial e Conservação de Energia
   - Conservação da Energia

2. Centro de Massa e Momento Linear
   - O centro de massa

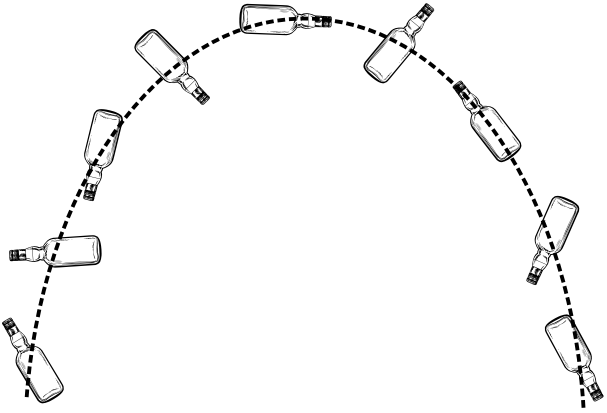
O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



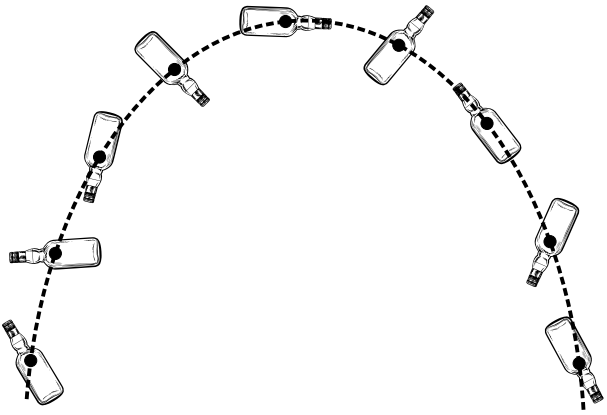
O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



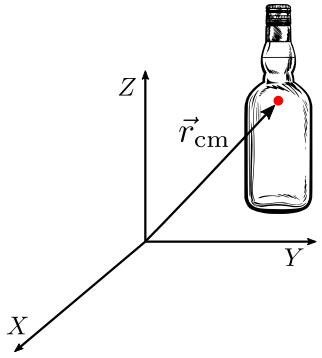
O centro de massa

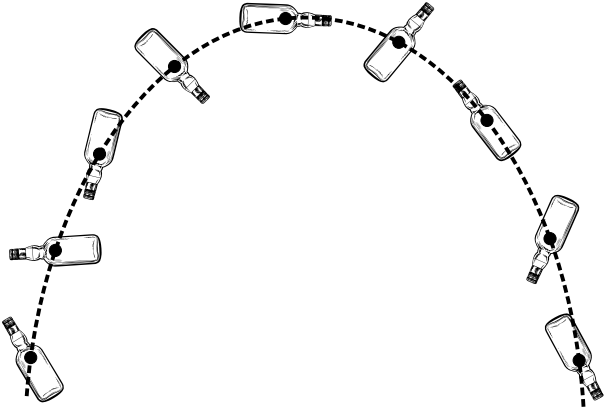
- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



O centro de massa

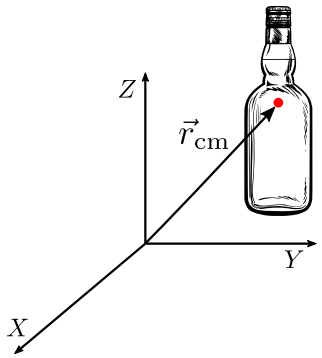
- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto

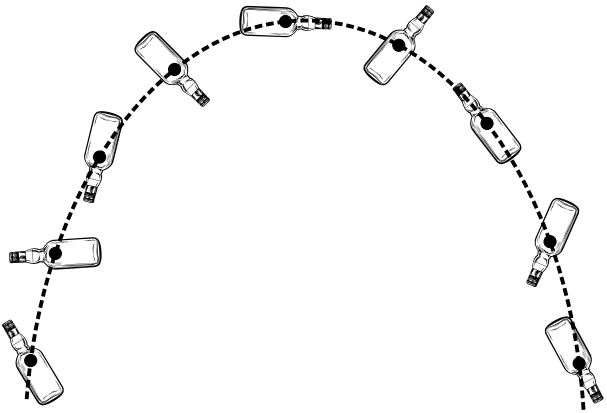




O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



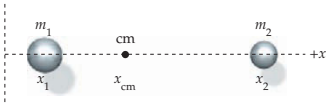


O centro de massa

- Para o sistema de duas partículas mostrado na figura ao lado, a posição do centro de massa é dada por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

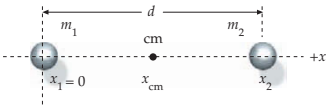
em que $M = m_1 + m_2$

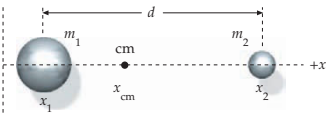


- Se escolhermos a origem convenientemente, obtemos

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d$$



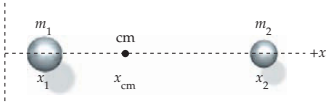


O centro de massa

- Para o sistema de duas partículas mostrado na figura ao lado, a posição do centro de massa é dada por

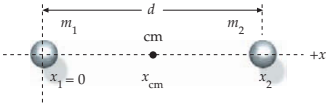
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

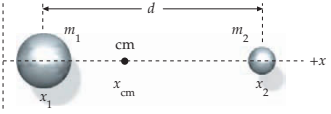
em que $M = m_1 + m_2$



- Se escolhermos a origem convenientemente, obtemos

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$
$$x_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d$$





- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

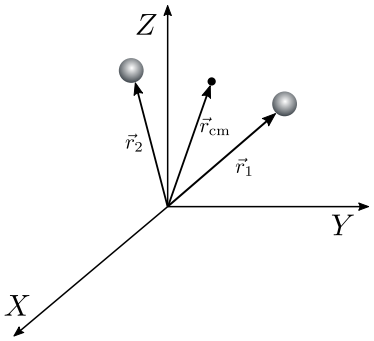
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

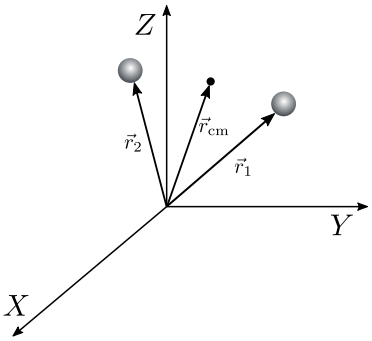
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

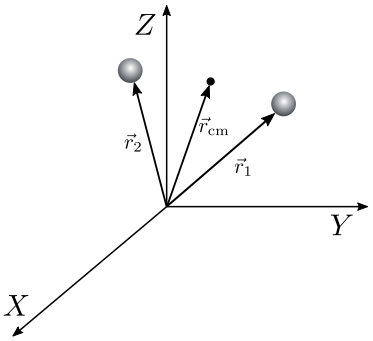
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

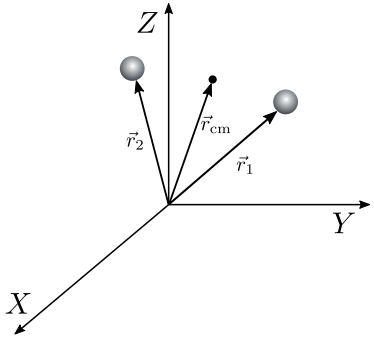
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



Centro de Massa

$$M\vec{r}_{\text{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

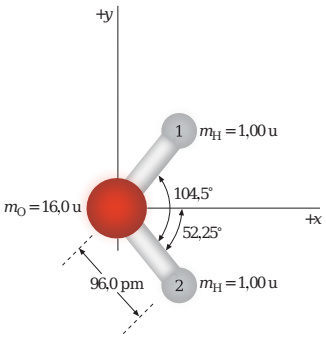
- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 6,53\text{pm}$$
$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(75,9\text{pm}) + (1,00\text{u})(-75,9\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 0,00\text{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\text{pm}\ \hat{i}}$$

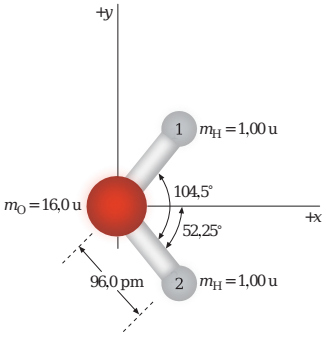


Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00u)(58,8pm) + (1,00u)(58,8pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 6,53pm$$
$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00u)(75,9pm) + (1,00u)(-75,9pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 0,00pm$$

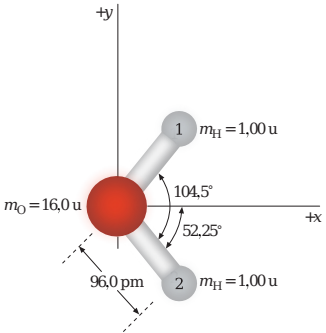
$$\vec{r}_{cm} = 6,53pm\ \hat{i}$$

Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 6,53\text{pm}$$
$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(75,9\text{pm}) + (1,00\text{u})(-75,9\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 0,00\text{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\text{pm}\ \hat{\imath}}$$

Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

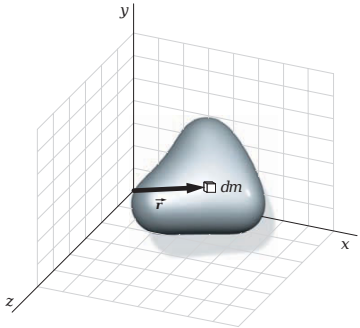
$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{1}{M}\int x dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad z_{cm} = \frac{1}{M}\int z dm$$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

Corpos maciços

Densidade constante

- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

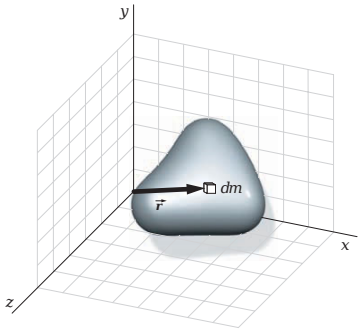
$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

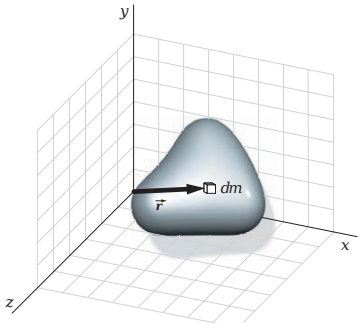
- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$



- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$



- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

Corpos maciços

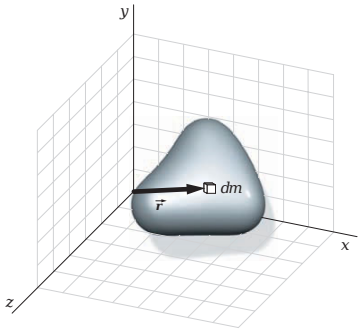
Densidade constante

- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$



- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V} \int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V} \int x\, dV \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V} \int y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V} \int z\, dV$$

Corpos maciços

Densidade constante

- Centro de massa

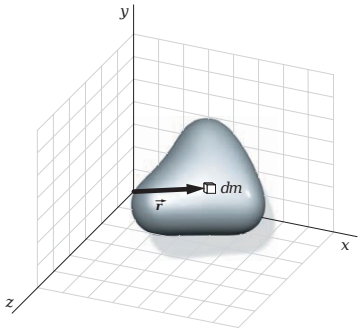
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$



- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

Corpos maciços

Densidade constante

- Centro de massa

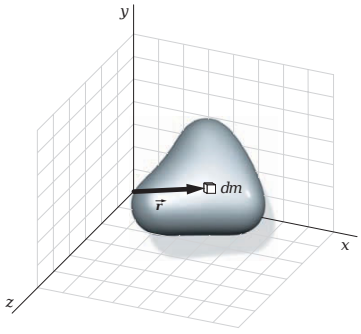
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$



- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

- Sendo que $dm = \lambda ds$, $x = R\cos\theta$ e $y = R\sin\theta$, obtemos

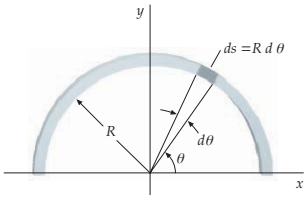
$$x_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \cos\theta\, ds \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \sin\theta\, ds$$

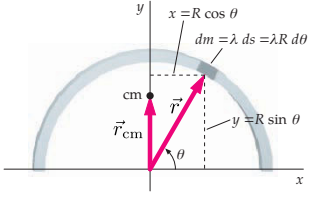
- Além disso, podemos escrever ds como $ds = Rd\theta$. E assim

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}$$



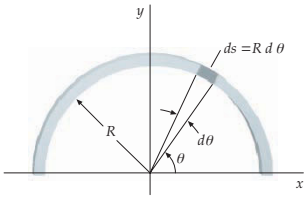


Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

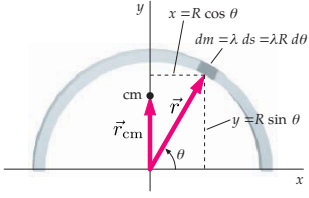


- Sendo que $dm = \lambda ds$, $x = R\cos\theta$ e $y = R\sin\theta$, obtemos

$$x_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \cos\theta\, ds \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \sin\theta\, ds$$

- Além disso, podemos escrever ds como $ds = Rd\theta$. E assim

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$



- Finalmente

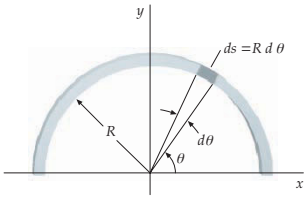
$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

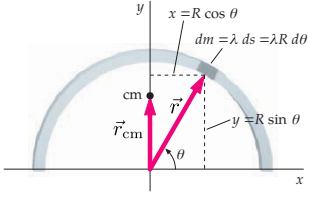


- Sendo que $dm = \lambda ds$, $x = R\cos\theta$ e $y = R\sin\theta$, obtemos

$$x_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \cos\theta\, ds \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \sin\theta\, ds$$

- Além disso, podemos escrever ds como $ds = Rd\theta$. E assim

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$



- Finalmente

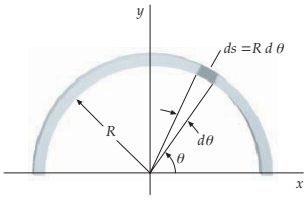
$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

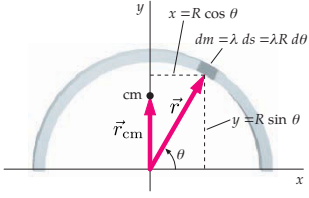


- Sendo que $dm = \lambda ds$, $x = R\cos\theta$ e $y = R\sin\theta$, obtemos

$$x_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \cos\theta\, ds \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \sin\theta\, ds$$

- Além disso, podemos escrever ds como $ds = Rd\theta$. E assim

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$



- Finalmente

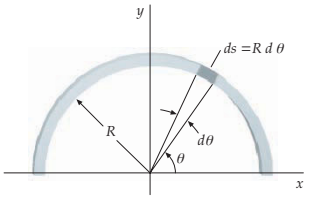
$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

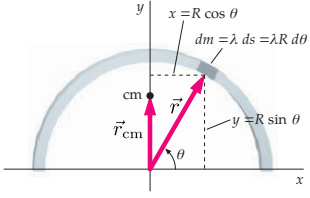


- Sendo que $dm = \lambda ds$, $x = R\cos\theta$ e $y = R\sin\theta$, obtemos

$$x_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \cos\theta\, ds \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R}{M}\int \sin\theta\, ds$$

- Além disso, podemos escrever ds como $ds = Rd\theta$. E assim

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$



- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

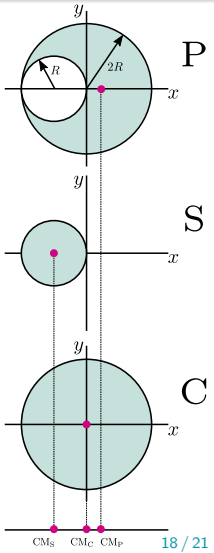
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$x_P = \frac{R}{3}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

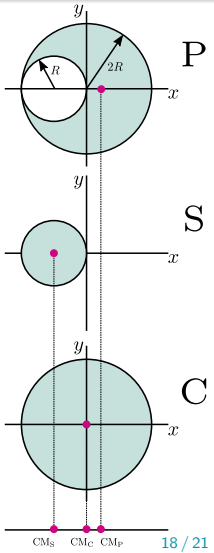
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$x_P = \frac{R}{3}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

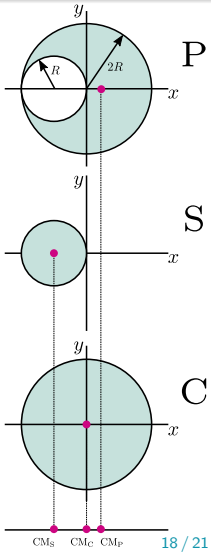
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$x_P = \frac{R}{3}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

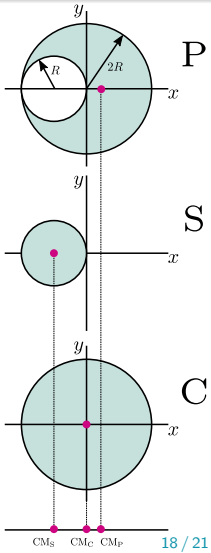
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$x_P = \frac{R}{3}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

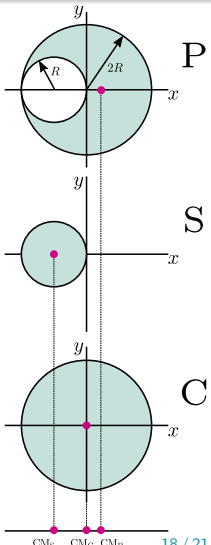
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$x_P = \frac{R}{3}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

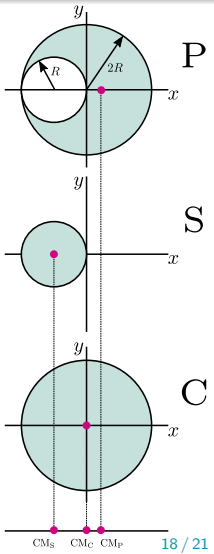
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

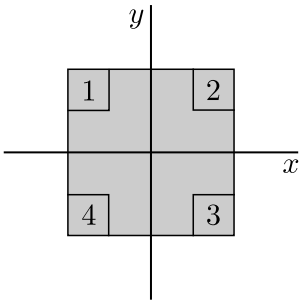
- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Teste

A figura mostra uma placa quadrada uniforme, da qual quatro partes quadradas iguais são removidas progressivamente dos cantos. (a) Qual é a localização do centro de massa da placa original? Qual é a localização do centro de massa após a remoção (b) da parte 1; (c) das partes 1 e 2; (d) das partes 1 e 3; (e) das partes 1, 2 e 3; (f) das quatro partes? Responda em termos dos quadrantes, eixos ou pontos (sem realizar nenhum cálculo).



Dicas

- Reproduza as passagens de maneira independente!
- Estude as referências!
  - D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física - Mecânica*, volume 1. LTC, 10 edition, 2016
  - P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para Cientistas e Engenheiros*, volume 1. LTC, 10 edition, 2009
  - H.M. Nussenzveig. *Curso de física básica, 1: mecânica.* E. Blucher, 2013
  - H.D. Young, R.A. Freedman, F.W. Sears, and M.W. Zemansky. *Sears e Zemansky física I: mecânica*
  - M. Alonso and E.J. Finn. *Física: Um curso universitário - Mecânica.* Editora Blucher, 2018
  - R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Lições de Física de Feynman.* Bookman, 2008

